Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 5

Titel: Wie lösen wir die Aufgabe in Klasse n? (33 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Die Arbeitsmaterialien dürfen nur persönlich für Ihre eigenen Zwecke genutzt und nicht an Dritte weitergegeben bzw. Dritten zugänglich gemacht werden. Sie sind berechtigt, für Ihren eigenen Bedarf Fotokopien in Klassensatzstärke zu ziehen bzw. Ausdrucke zu erstellen. Jede gewerbliche Weitergabe oder Veröffentlichung der Arbeitsmaterialien ist unzulässig.

- Die vollständigen Nutzungsbedingungen finden Sie hier.

Sekundarstufe

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de
Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach
Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377
http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

Wie lösen wir die Aufgabe in Klasse n? | 3.4

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler können das gleiche geometrische Problem mehrere Schuljahre hindurch immer wieder mit einem soeben gelernten Verfahren auf neue Weise erfolgreich bearbeiten.*
- *Sie erleben dabei, dass sie ihre Kompetenz, Probleme zu lösen, erweitert und verbessert haben. Dies gelingt vor allem deshalb, weil die vorgelegte geometrische Aufgabe so beschaffen ist, dass viele Schüler selbstständig weitere Lösungswege finden können.*
- *Die Schüler erfahren, dass Lösungsverfahren für ein geometrisches Problem angemessen oder unzureichend sein können, je nachdem, ob es sich um eine anwendungsbezogene oder aber eine zweckfreie Problemstellung handelt.*
- *Schülern wird anhand einer einzigen einfachen Problemstellung ermöglicht, sich einen gewissen Überblick über Inhalte und Methoden der Schulgeometrie zu verschaffen.*

Zentrales Anliegen:

Geometrie ist ein reiches Geflecht von Zusammenhängen. Dies kann deutlich werden, wenn ein Problem auf mannigfache Weise bearbeitet wird. Erfahrungsgemäß motiviert es Lernende, wenn sie an konkreten Beispielen erleben, dass es ihnen durch weiteres Lernen gelungen ist, ihre mathematische Kompetenz zu verbessern **(„kumulatives Lernen“)**. Besonders geeignet sind hierzu Aufgaben, welche im Laufe der Schulzeit immer wieder neu und gelegentlich auch deutlich günstiger bearbeitet werden können.

Wir betten ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem ein Hypotenusenabschnitt doppelt so lang wie der andere ist, in ein Rechteck ein. Eine geringe Veränderung der entstehenden Figur provoziert die Frage, ob ein Winkel exakt oder näherungsweise ein rechter Winkel ist. Rechte Winkel sind etwas Besonderes, daher ist diese Fragestellung geeignet, über die gesamte Schulzeit immer wieder neu bearbeitet zu werden. Da es zum vorliegenden geometrischen Problem auch für schwächere Schüler viele Lösungswege gibt, können diese selbstständig weitere Möglichkeiten finden. Danach werden eigene Lösungswege verglichen und engagiert bewertet. Ziel ist, möglichst viele Schüler Freude an eigenem Denken erleben zu lassen.

Die Bezeichnung „Geometrie“ verweist auf die nützliche Landvermessung nach den jährlichen Nilüberschwemmungen. Auf Anwendungen gerichtete Geometrie ist eine Technik, mit der durch Messen, Zeichnen und numerische Berechnungen praktische Aufgaben in der realen Welt angemessen gelöst werden können. Wir lassen eine Figur mit vorgegebenen Längen und Winkeln zeichnen. Danach wird ein Winkel gemessen oder aus Messungen berechnet. Dabei sind Zeichen- und Messungenauigkeiten unvermeidlich: Genau genommen werden keine exakten Maßzahlen ermittelt, sondern es wird ein Intervall mitgeteilt, in dem die Größe des Winkels liegt. Es kann nur festgestellt werden, ob die Größe eines Winkels dieser Figur in einem Intervall liegt, welches 90° enthält. Ob ein Winkel exakt ein rechter Winkel ist, ist bei diesem Vorgehen keine angemessene Frage.

In Griechenland entwickelte sich durch Idealisierung des Anschauungsraums eine zweckfreie Wissenschaft, in der durch Skizzieren und Nachdenken Beziehungen und Zusammenhänge in einer gedachten Welt erschlossen werden. Stellen wir durch Nachdenken zweifelsfrei fest, dass ein Winkel in einer zwar nur unzureichend gezeichneten, aber als exakt gedachten Figur ein rechter Winkel sei, dann sind wir uns bewusst, dass diese Aussage durch eine Messung an der realen Figur nicht belegt werden kann. Die Sicherheit und Gewissheit der durch logische Argumentation gewonnenen Aussagen über eine Figur der euklidischen Ebene ist über Jahrhunderte bis heute für wissenschaftliches Arbeiten vorbildhaft geworden. Solche „reine Geometrie“ darf Schülern nicht vorenthalten werden.

3.4	Wie lösen wir die Aufgabe in Klasse n?

Vorüberlegungen

Geometrieunterricht soll beide Aspekte an geeigneten Stellen angemessen vermitteln. Zuerst werden mithilfe eines Geodreiecks und eines Zirkels Figuren in ein Heft oder an eine Tafel gezeichnet, sie können auch auf den Fußboden gemalt oder im Schulhof abgesteckt werden. Danach soll in solchen realen Figuren gemessen werden. Nicht der Lehrer, sondern die Fragestellung, ob ein Winkel der Figur genau oder nur fast ein rechter Winkel ist, motiviert Kinder zu sorgfältigem Arbeiten mit Bleistift, Geodreieck und Zirkel. In den ersten Geometriestunden müssen Schüler noch nicht erkennen, dass auch bei größter Sorgfalt Zeichnen und Messen allein nicht genügen, um mit Gewissheit festzustellen, dass ein Winkel genau ein rechter Winkel ist. Messen die Kinder 90°, dann mag dieser Winkel bis auf weiteres als rechter angesehen werden. Im Laufe der nächsten Jahre muss aber deutlich werden, dass zu einer gemessenen Maßzahl stets eine Messgenauigkeit gehört. Hat ein Rechteck eine Seite der Länge 7,0 cm, dann ist diese mindestens 6,95 cm und weniger als 7,05 cm lang. Werden 7,00 cm angegeben, dann ist Seite mindestens 6,995 cm und weniger als 7,005 cm lang.

Zuerst arbeiten wir im Mathematikunterricht mit sichtbaren Figuren, danach aber mit gedachten (idealen) Figuren. Dem Übergang von einer realen Figur zu einer gedachten Figur entspricht der Übergang von einer im Rahmen der Messgenauigkeit gewonnenen Länge oder Winkelgröße zur Einführung der Idee von exakten Maßzahlen ohne die Notwendigkeit einer Intervallangabe. Dabei handelt es sich im Unterricht um eine allmähliche, zuerst eher verborgene Entwicklung. Beispielsweise ist es nicht üblich, den Satz des Pythagoras wie folgt zu formulieren: Die Quadrate über den Seiten eines im Rahmen der Zeichengenauigkeit rechtwinkligen Dreiecks haben zusammen praktisch genau den gleichen Flächeninhalt wie das Hypotenusenquadrat. Diese Aussage ist aber für viele Anwendungen durchaus ausreichend.

Flächensätze an rechtwinkligen Dreiecken und deren Kehrsätze erlauben durch Rechnungen sichere Aussagen über einzelne gedachte Figuren. Bei der Argumentation werden ein mathematischer Satz und sein Kehrsatz scharf getrennt. Jeder Flächensatz ist für einen Lösungsansatz geeignet, es gibt aber deutliche Unterschiede im benötigten Rechenaufwand. Treten zu geometrischen Aussagen algebraische Termumformungen mit Variablen hinzu, dann sind Aussagen über Klassen von Figuren möglich. Wer sich einen Überblick verschafft hat, kann einen günstigen Lösungsansatz wählen. Es ist aber auch lobenswert, wenn durch Beharrlichkeit und algebraisches Können ein ungünstiger Ansatz zu Ende gebracht wird. Bei den für uns interessanten Rechtecken ist das Verhältnis der Seitenlängen eine Irrationalzahl. Rationale Maßzahlen reichen aus, reale geometrische Figuren zu messen. Sie genügen auch, vernünftig gerundete Rechenergebnisse mitzuteilen. Zur Untersuchung gedachter Figuren in der euklidischen Geometrie werden aber Irrationalzahlen unentbehrlich. Spätestens jetzt kann deutlich werden, dass wir uns ein Rechteck mit den exakten Seitenlängen 12,0 cm und 5,2 cm zwar denken können, aber herstellen können wir es nicht. Bei Messungen an einer realen Figur geht die Frage, ob ein Winkel exakt oder nahezu ein rechter sei, ins Leere. Liegt aber eine gedachte Figur zu Grunde, kann diese Frage zwar vielleicht erst nach intensivem Nachdenken, dann aber sicher und zweifelsfrei beantwortet werden.

Die Behandlung der Trigonometrie zeigt beide Gesichter der Geometrie. Winkelfunktionen und Zusammenhänge zwischen diesen erlauben exakte Aussagen über gedachte geometrische Figuren. Werden Längen und Winkel einer konkreten Figur gemessen, können mithilfe geeigneter Winkelfunktionen weitere Längen und Winkelgrößen berechnet und danach mit der Genauigkeit angegeben werden, die den vollzogenen Messungen entspricht. Dabei können Taschenrechner nützlich sein. Ob aber eine gedachte geometrische Figur einen Winkel enthält, der exakt oder doch nur nahezu ein rechter Winkel ist, kann durch numerische Rechnungen mit dem Taschenrechner dann nicht entschieden werden, wenn der Unterschied zum rechten Winkel hinreichend klein ist.

Wie lösen wir die Aufgabe in Klasse n? | 3.4

Vorüberlegungen

Einordnung:

Bei der Bearbeitung des Problems können unter anderem folgende Inhalte angesprochen werden: Winkelmessung, Zeichen- und Messungenauigkeit, der Satz des Thales, der Satz des Pythagoras und seine Umkehrung, weitere Flächensätze an rechtwinkligen Dreiecken und deren Kehrsätze, der 3. Ähnlichkeitssatz, die Steigungen orthogonaler Geraden, Winkelfunktionen, goniometrische Formeln und der Kosinussatz. Mit diesen Arbeitsblättern können sich Schüler bei Wiederholungen Überblicke verschaffen und Zusammenhänge zwischen geometrischen Aussagen wahrnehmen. Dabei wird solides verlässliches Wissen und Können gefestigt werden.

Beginnend im 5. Schuljahr kann die eine geometrische Aufgabe in fast jedem Schuljahr neu bearbeitet werden. Dass Schüler dabei ihren Lernfortschritt erleben, wird sie immer wieder zum Weiterlernen motivieren.

Da es auch in den einzelnen Klassenstufen jeweils mehrere einfache Lösungswege gibt, bieten sich kooperative Unterrichtsformen an. Ihr **Selbstvertrauen** kann gefördert werden, wenn Schüler selbst gefundene Lösungswege in freundlicher Atmosphäre zur Diskussion stellen, angemessen bewerten und mit anderen Möglichkeiten vergleichen können. Ausführliche Lösungshinweise möchten die selbstständige Arbeit der Schüler fördern und zum Weiterdenken anregen.

Es ist in der Elementargeometrie üblich, den Satz des Pythagoras und seinen Kehrsatz zu trennen und nicht beide in einer Aussage zusammenzufassen. Dies erfordert bei der Argumentation besondere Sorgfalt. Daher sind auf dem **Blatt M1** Sätze zu rechtwinkligen Dreiecken samt deren Kehrsätzen zusammengestellt.

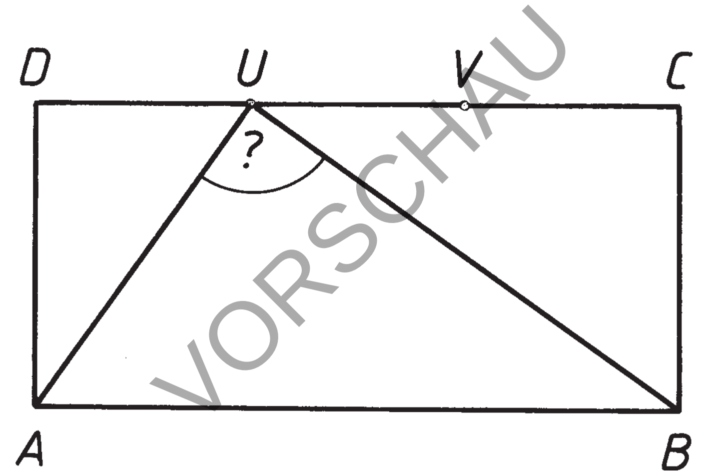
Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Wir zeichnen und messen
2. Schritt: Wir konstruieren mithilfe des Satzes des Thales
3. Schritt: Erste rechnerische Lösungen
   Flächensätze an rechtwinkligen Dreiecken erlauben durch indirektes Schließen die Feststellung, dass in einer vorgegebenen Figur kein rechter Winkel vorliegt.
4. Schritt: Wir benötigen Sätze und Kehrsätze
   Kehrsätze zu Aussagen an rechtwinkligen Dreiecken sind geeignet, Rechtwinkligkeit bei einzelnen Figuren zu sichern.
5. Schritt: Wir gewinnen allgemeingültige Aussagen: Treten zu geometrischen Argumentationen Variable und algebraische Umformungen hinzu, so können Aussagen über Klassen von Figuren gemacht werden.
6. Schritt: Wir argumentieren mit Winkelfunktionen
   Winkelfunktionen sind geeignet, allgemeingültige Aussagen über Klassen von Figuren zu gewinnen.
7. Schritt: Wir berechnen Winkelgrößen
   In vorgegebenen Figuren werden mithilfe von Winkelfunktionen aus Messdaten Winkelgrößen berechnet. Wird ein Taschenrechner zur numerischen Berechnung benutzt, erzielt man im Allgemeinen eine für praktische Fragestellungen hinreichende Genauigkeit. So kann aber gelegentlich nicht zweifelsfrei entschieden werden, ob ein Winkel exakt oder nahezu ein rechter Winkel ist. Jeder Schüler entwickelt für seinen eigenen Taschenrechner Aufgaben, bei denen sein Taschenrechner hier keine sichere Entscheidung zulässt.

Wie lösen wir die Aufgabe in Klasse n?	3.4

Unterrichtsplanung

Das Problem:
In einfachen Figuren tritt ein Winkel auf, von dem entschieden werden soll, ob es sich um einen rechten Winkel handelt.
Dieses Problem kann auf mannigfache Weise behandelt werden.



1. Schritt: Wir zeichnen und messen

Benötigte Kenntnisse:
Die Schüler können mit dem Geodreieck Winkel zeichnen und messen.

Mithilfe eines Geodreiecks wird eine Figur gezeichnet und danach ein Winkel gemessen. Die Schüler vergleichen ihre Messergebnisse. Sehr große Unterschiede motivieren zu sorgfältigem Umgang mit Bleistift, Geodreieck und Zirkel. Mit zunehmender Übung nehmen die Unterschiede deutlich ab.
Eine Testreihe von Rechtecken ist so gewählt, dass der fragliche Winkel zuerst deutlich kleiner als 90° ist, danach zunimmt, um schließlich deutlich größer als 90° zu werden. Offensichtlich muss dazwischen ein rechter Winkel vorkommen. Viele Schüler behaupten auch, einen solchen genau zu messen. Dies kann später problematisiert werden.
Figuren können ins Heft oder an die Tafel gezeichnet werden. Sie können aber auch im Schulhof abgesteckt werden.

Arbeitsblatt 1 (M2); **Lösungen** s. **M13**

2. Schritt: Wir konstruieren mithilfe des Satzes des Thales

Benötigte Kenntnisse:
Die Schüler wissen den Satz des Thales und können ihn bei Konstruktionen anwenden.

Mithilfe des Satzes des Thales werden geometrische Figuren konstruiert, und zwar nicht nur im Heft, sondern beispielsweise auch mit Kreide im Schulhof. Werden benötigte Pythagoräische Tripel (3; 4; 5), (45; 60; 75), (5; 12; 13) als altes Erfahrungswissen mitgeteilt, dann können rechte Winkel mit einer ägyptischen Schnur konstruiert werden.

Arbeitsblatt 2 (M3); **Lösungen** s. **M14**