Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 7

Titel: Tragfähige Bruchvorstellungen II (23 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Die Arbeitsmaterialien dürfen nur persönlich für Ihre eigenen Zwecke genutzt und nicht an Dritte weitergegeben bzw. Dritten zugänglich gemacht werden. Sie sind berechtigt, für Ihren eigenen Bedarf Fotokopien in Klassensatzstärke zu ziehen bzw. Ausdrucke zu erstellen. Jede gewerbliche Weitergabe oder Veröffentlichung der Arbeitsmaterialien ist unzulässig.

- Die vollständigen Nutzungsbedingungen finden Sie hier.

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:
Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de
Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach
Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377
http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

Tragfähige Bruchvorstellungen II	1.9

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler vertiefen in der zweiten und dritten Phase tragfähige Bruchvorstellungen.*
- *Sie erweitern ihre Vorstellungen der verschiedenen Interpretationen von Brüchen, etwa als Anteil oder als Größe.*
- *Sie werden vertraut mit der Addition und Subtraktion von Brüchen, mit Erweitern und Kürzen, dem Größenvergleich von Brüchen, ihrer Multiplikation und Division und dem Darstellen von Brüchen auf dem Zahlenstrahl.*
- *Sie übertragen die konkret gewonnenen Vorstellungen auf abstraktere Aufgaben, die sich nicht mehr am Material legen lassen.*

Zentrales Anliegen:

Nachdem die Schüler in der 1. Phase Vorstellungen von Brüchen mithilfe von Material gewonnen haben (siehe [1]), werden sie anhand schwierigerer Aufgaben gezwungen, sich in der 2. und 3. Phase zunehmend **von diesem Material zu entfernen**, ohne jedoch auf die **Vorstellungen** zu verzichten. In der 2. Phase bekommen die Schüler immer noch keine Regeln zum Bruchrechnen mitgeteilt, sondern gehen weiterhin intuitiv mit Aufgaben um. Nach und nach werden Regeln entdeckt und in der Klasse diskutiert. Diese werden in der 3. Phase vervollständigt und anhand von Schulbuchaufgaben geübt.

Einordnung:

Hier wird die 2. und 3. Phase eines Konzepts zum Bruchrechnen beschrieben, das auf 3 Phasen ausgelegt ist. In jeder Phase werden fast alle Inhalte behandelt, sodass die meisten Inhalte dreimal aus verschiedener Sicht aufgegriffen werden. Nachdem in der 1. Phase Brüche ausschließlich **quasikardinal** geschrieben wurden (z.B.: *2 Drittel*), werden in der 2. Phase, aber insbesondere in der 3. Phase, Brüche nach und nach in der **Standardschreibweise** geschrieben, wobei die Schüler den Umstieg zwar in individuell unterschiedlicher Geschwindigkeit, aber letztlich ohne Probleme schaffen: Schüler, denen die abstrakte Schreibweise zunächst noch schwerfällt, sollten die quasikardinale Schreibweise länger nutzen.

Phase 2:
In der 2. Phase wird die **Intuition** auf Brüche ausgedehnt, die sich nicht mehr mit Material legen lassen. Es kommen immer auch kompliziertere Nenner vor. Die **Anschauung** findet verstärkt **im Kopf** statt. Es sollte immer noch großer Wert auf Skizzen zu den einzelnen Aufgaben gelegt werden. In dieser Phase findet der Übergang zur Standardschreibweise bei Brüchen statt. Es werden immer noch keine Regeln formuliert, außer Schüler entdecken diese für sich. Dann sollten sie ihre Entdeckungen in einem persönlichen Bruchrechenheft dokumentieren.

Phase 3:
Spätestens jetzt formulieren die Schüler selbst Regeln zum Bruchrechnen und halten sie schriftlich fest. Sie greifen nicht mehr bei jeder Aufgabe auf die Anschauungen zurück, sondern gehen langsam zum **formalen Rechnen** über. Hier lassen sich sehr gut Aufgaben aus Schulbüchern verwenden. Deswegen gibt es zu dieser Phase keine Aufgabenblätter mehr.

Wie oben bereits erwähnt, sollte jeder Schüler in seinem **persönlichen Bruchrechenheft** die Möglichkeit erhalten, gefundene Erkenntnisse oder Regeln aufzuschreiben. Spätestens bis zum Abschluss der 3. Phase sollte zur Darstellung und Umwandlung von Brüchen und zu jeder Rechenart mindestens ein Eintrag ausgeführt worden sein. Eine Möglichkeit, diese Einträge durch Anstöße von Seiten der Lehrkraft zu initiie-

1.9	Tragfähige Bruchvorstellungen II

Vorüberlegungen

ren, wird in Material **M13** gezeigt. Die dort dargestellten Texte bzw. Aufgaben wurden von jedem Schüler in sein Heft übernommen, selbstständig bearbeitet und bis zur beiderseitigen Zufriedenheit von Lehrkraft und Schüler überarbeitet. Vorteilhaft bei dieser Methode ist, dass der Schüler gezwungen wird, seine Gedanken zu formulieren und **Regelhaftigkeiten in seiner eigenen Sprache** zu explizieren. Werden schließlich schwierigere Aufgaben aus dem Schulbuch behandelt, kann er anhand von einfachen Beispielen, eigenen Skizzen und formulierten Regeln auch mit relativ abstrakten Brüchen operieren.

Die Einteilung in 3 Phasen, wie sie oben aufgeführt ist, soll vor allem eine **Entwicklung** aufzeigen, die jeder einzelne Schüler durchläuft. Im Unterricht werden die Übergänge zwischen den Phasen fließend sein, und die verschiedenen Schüler werden die unterschiedlichen Abstraktionsstufen nicht gleichzeitig durchlaufen. Deshalb beinhalten die dargestellten Arbeitsblätter zusätzlich zu Aufgaben, die der Phase 2 zuzuordnen sind, stellenweise bereits anspruchsvollere Teile. Zusätzlich haben die Arbeitsblätter meist einen inhaltlichen Schwerpunkt, anderes wird „nebenbei“ behandelt. Das verhindert stures Abarbeiten einer isolierten Thematik.

Literatur:

[1] Stephan Rosebrock und Anna Schill: *Tragfähige Bruchvorstellungen*, Kreative Ideenbörse Mathematik Sek. I, hrsg. von Hartmut Köhler, Heft 3, Olzog-Verlag (2005), S. 1 – 24.
[2] Stephan Rosebrock und Anna Schill: *Ein anschauungsorientiertes Konzept zum Unterrichten von Bruchrechnen*, Gestalt-Theory 27 (4), (2005), S. 291 – 306.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Addieren und Subtrahieren (Phase 2)
2. Schritt: Gleichwertige Brüche (Phase 2)
3. Schritt: Multiplizieren (Phase 2)
4. Schritt: Dividieren (Phase 2)
5. Schritt: Phase 3

Tragfähige Bruchvorstellungen II	1.9
Unterrichtsplanung	

1. Schritt: Addieren und Subtrahieren

Während sich in Phase 1 an vielen Stellen noch die Problematik des Hauptnenners bei Additionen und Subtraktionen umgehen ließ, sind die Schüler dieser nun ausgeliefert. Zunehmend müssen sie Rechnungen lösen, die sich nicht mehr allein durch das Legen von Material lösen lassen. Es entsteht die Frage, wie man mit Summanden umgeht, die unterschiedliche Nenner haben.

Unumgänglich entsteht hier die Einsicht, dass Additionen und Subtraktionen mit gleichnamigen Brüchen einfach zu lösen sind, während für die anderen Aufgaben noch kein Handwerkszeug bereitsteht. Es ist also sehr gut einsichtig für die Schüler, dass ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht werden müssen, ohne dabei die Wertigkeit der einzelnen Brüche und somit das Ergebnis zu verändern. Das erinnert an den bekannten Fall des Rechnens mit Größen, bei dem das Umrechnen in gleiche Einheiten der Summanden die notwendige Vorarbeit für eine Addition darstellt. Durch die Nutzung der quasikardinalen Schreibweise stößt man hier weniger wahrscheinlich als in konventionellem Bruchrechenunterricht auf das Problem, dass die Schüler bei der Addition „Zähler plus Zähler" und „Nenner plus Nenner" rechnen.

Um einen geeigneten Hauptnenner zu benennen, müssen die Schüler nicht unbedingt immer den kleinstmöglichen Hauptnenner finden. Auch andere Verfahren sind denkbar, wie z.B. das Multiplizieren der unterschiedlichen Nenner.

Im **Arbeitsblatt 1** (**M1**) wird langsam auf die Addition und Subtraktion von Brüchen mit verschiedenen Nennern hingearbeitet.

2. Schritt: Gleichwertige Brüche

Wie im ersten Schritt ersichtlich wurde, kann dieser zweite Schritt nicht zeitlich getrennt auf den ersten Schritt folgen. Vielmehr ergibt sich die Notwendigkeit zum Kürzen und Erweitern bzw. auch zum Umrechnen von gemischten Brüchen in echte Brüche oder umgekehrt automatisch im Verlauf der immer schwierigeren Additions- und Subtraktionsaufgaben.

Um Additionen und Subtraktionen zu bewältigen, die auch unterschiedliche, nicht konkret legbare Brüchen beinhalten, müssen die Schüler Brüche erweitern (und kürzen) können. Bisher wurden nur solche Brüche erweitert und gekürzt, die konkret vorlagen. Nun geht es gerade auch um die anderen. Z.B. bietet es sich an, Halbe nicht nur als Viertel, Achtel und Sechzehntel, sondern als nächsten Schritt auch als Zweiunddreißigstel und Vierundsechzigstel darzustellen. Hier können die Schüler auf einfachem Niveau das Erweitern von Brüchen abstrahieren und Regelmäßigkeiten erkennen.

Beim Kürzen von Brüchen kommt die Problematik dazu, ob bzw. auf welche Weise überhaupt gekürzt werden kann. Hier behindern Schwierigkeiten mit dem kleinen 1 x 1 bzw. einfachen Teilbarkeitsregeln den Lernfortschritt oft stark.

Auf den **Arbeitsblättern 2 bis 4** (**M2 bis M4**) wird der schwierige Schritt hin zum Erweitern bei der Addition vollzogen. Dieser Schritt sollte gründlich im Unterricht behandelt und mit den Schülern diskutiert werden. Das Zeichnen hat nach wie vor eine zentrale Funktion. So könnten die Schüler z.B. aufgefordert werden, die Gleichungen *2 Drittel = 4 Sechstel*, oder, zu einem späteren Zeitpunkt *6 Achtel = 9 Zwölftel*, zeichnerisch zu verifizieren.

Auch die Umformung von gemischten Zahlen in echte Brüche und umgekehrt sollte an dieser Stelle wieder thematisiert werden. Insbesondere bei Addition und Subtraktion, aber auch zur Abschätzung von Er-

1.9	Tragfähige Bruchvorstellungen II
	Unterrichtsplanung

gebnissen kann es oft sinnvoll sein, echte Brüche in gemischte Zahlen umzuwandeln.

Dazu bietet sich ein Gruppenarbeitsauftrag wie folgender an:

Diskutiert, wie viele Ganze aus diesem Bruch entstehen können. Was bleibt als Rest? Stellt euer Gruppenergebnis vor.

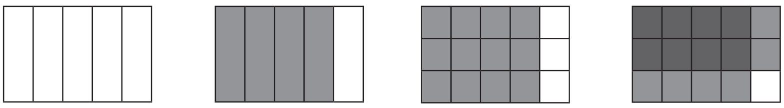
Hier, wie an anderen Stellen zwischendurch, sollten Übungsaufgaben zu den in diesem Moment nicht behandelten Bereichen der Bruchrechnung gerechnet werden. Dazu haben wir beispielhaft gemischte Übungsblätter eingefügt (siehe **Arbeitsblätter 5, 8, 9 und 12, M5, M8, M9 und M12**).

3. Schritt: Multiplizieren

In der ersten Phase wurden nur **natürliche Zahlen mit Brüchen** multipliziert. In der zweiten Phase gilt es, die Schüler an die Multiplikation von zwei oder mehr **Brüchen miteinander** heranzuführen, was an ihr Vorstellungsvermögen hohe Ansprüche stellt. Hier bietet sich die Vorstellung des Multiplizierens als „von", also z.B. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ = „ein Viertel *von* einem Halben" an. Gleichzeitig birgt diese Vorstellung die Gefahr des Übergeneralisierens, denn „von" ist nicht grundsätzlich mit „mal" gleichzusetzen, wie folgendes Beispiel zeigt: Im Fall „3 von 4 Äpfeln" ist diese Übersetzung nicht gültig, da hier von einem absoluten Anteil ausgegangen wird, statt von einem für die Multiplikation gebrauchten relativen Anteil. Um Verwirrung zu vermeiden, sollten die beiden Vorstellungen von „von" im Unterricht nicht vermischt werden. Wir beziehen uns hier ausschließlich auf die multiplikative Anteilsdeutung.

Eine mögliche Veranschaulichung für Aufgaben, bei denen Brüche kleiner 1 miteinander multipliziert werden, könnte diese sein:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$



$\frac{x}{5}$ $\qquad \frac{4}{5}$ $\qquad \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{5} =$ $\qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Einerseits lässt sich über Generalisierung auch hier „im Kleinen" die Regel zur Multiplikation finden, andererseits lässt sich diese Veranschaulichung auch auf Brüche größer 1 ausdehnen.

Ein anderer Weg zur Multiplikation über das Permanenzprinzip ist auf den **Arbeitsblättern 6 und 7** (**M6 und M7**) vorgezeichnet. Anhand dieser Aufgaben ergibt sich die Deutung der Multiplikation als „von". Die Lehrkraft sollte alle Schüler auffordern, zu den Textaufgaben Rechnungen zu notieren. Bei den Aufgaben 1a) bis c) von Arbeitsblatt 6 ist die Multiplikation für die Schüler leicht ersichtlich. In den nun folgenden Aufgaben sind die Faktoren nicht mehr natürliche Zahlen sondern Brüche. Da die Struktur der Aufgabe jedoch gleich bleibt, bietet es sich an, wieder die Multiplikation als Rechenzeichen zu benutzen (Permanenzprinzip).

