

Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 7

Titel: Über gerechte Aufteilungen (27 S.)

Produktinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- ▶ Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie [hier](#).

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- ▶ Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie [hier](#).

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- ▶ Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- ▶ Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie [hier](#).

Nutzungsbedingungen

Die Arbeitsmaterialien dürfen nur persönlich für Ihre eigenen Zwecke genutzt und nicht an Dritte weitergegeben bzw. Dritten zugänglich gemacht werden. Sie sind berechtigt, für Ihren eigenen Bedarf Fotokopien in Klassensatzstärke zu ziehen bzw. Ausdrucke zu erstellen. Jede gewerbliche Weitergabe oder Veröffentlichung der Arbeitsmaterialien ist unzulässig.

- ▶ Die vollständigen Nutzungsbedingungen finden Sie [hier](#).

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

[Kontaktformular](#) | ✉ Mail: service@eDidact.de

✉ Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach

☎ Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | 📠 Fax: +49 (0)9221 / 949-377

<http://www.eDidact.de> | <https://www.bildung.mgo-fachverlage.de>

Über gerechte Aufteilungen

5.2

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- Die Schüler beschäftigen sich mit der Frage, ob die Aufteilung eines Preises, die Einsätze bei einer Wette, die Aufteilung eines Erbes als „gerecht“ angesehen werden können. Sie werden im Mathematikunterricht mit dem ethischen und juristischen Begriff „gerecht“ konfrontiert.
- Sie kennen mathematische Beweise und Argumentationen. Sie arbeiten nun mit Beispielen für juristische Begründungen und ethische Rechtfertigungen. Dabei stärken sie ihr Urteilsvermögen, üben folgerichtiges Denken und erfahren, dass Ungewissheit ernst genommen werden muss.
- Sie erfahren, dass mathematische Überlegungen nicht geeignet sind, Handlungen ethisch zu rechtfertigen, dass mathematische Begriffe aber nützlich sein können, Rechtfertigungen rational zu hinterfragen. Sie können Mathematik von einer in der Schule wenig bekannten und daher motivierenden Seite erleben.

*Wenn's ans Teilen geht, geht's ans Raufen.
Was können mathematische Überlegungen da nützen?*

Zentrales Anliegen:

Ein zentrales Thema im Mathematikunterricht ist das **Argumentieren und Begründen**. Jedoch wird nicht nur in der Mathematik argumentiert und folgerichtig begründet. Sollen Lernende einmal tiefer einsteigen, um ihre **Urteilsfähigkeit** zu stärken, dann gehören zu diesem Thema nicht nur unterschiedliche mathematische Begründungen und Beweise, sondern beispielsweise auch **juristische** Urteilsbegründungen und **ethische** Rechtfertigungen von Handlungen. Einem mathematischen Beweis liegen Grundaussagen (Axiome) zugrunde, ein juristisches Urteil stützt sich auf Gesetze, in einer ethischen Rechtfertigung werden zugrunde liegende ethische Normen und Prinzipien offengelegt. Wie wir sehen, sprengt das Thema Argumentieren und Begründen die Grenzen eines Faches und macht eine Kooperation mehrerer Fächer der Schule wünschenswert. Hierzu kann der Beitrag Material und Anregungen geben.

Die Schüler wissen, dass eine mathematische Aussage und die Lösung einer mathematischen Aufgabe nur entweder wahr oder aber falsch sein können, etwas Drittes gibt es zumindest in der Schulmathematik nicht. Die geometrische Aussage, dass in jedem Dreieck die Summe der Größen der Innenwinkel 180° beträgt, wird erst durch einen mathematischen Beweis zu einem Satz der Geometrie. In diesem wird die Aussage beispielsweise aus den folgenden Grundaussagen gefolgert: „Gestreckte Winkel haben die Größe 180° . Zu einem Punkt und einer Geraden gibt es durch den Punkt zur Geraden eine einzige Parallele. Wechselwinkel an Parallelen sind gleich groß.“ Dabei ist der Tatbestand unstrittig: Es handelt sich um Winkel in einem Dreieck der euklidischen Geometrie. Der Beweis ist richtig und die gewonnene Aussage ist wahr, wenn die bekannten logischen Regeln korrekt angewendet worden sind.

Soll ein juristisches Urteil gefällt werden, dann mag das erste Problem sein, den Tatbestand zu ermitteln. Erst danach kann der Richter ein Urteil fällen. Dieses muss eine gesetzliche Grundlage haben. („Die vollziehende Gewalt und die Rechtssprechung sind an Gesetz und Recht gebunden.“ Grundgesetz, Artikel 20, III). Überdies sollen die im Urteil enthaltenen Maßnahmen geeignet, erforderlich und angemessen sein. Gelegentlich gibt es das eine, einzig stimmige Urteil nicht, sondern mehrere vertretbare Lösungen.

Lernende können gar nicht oft genug erfahren, dass mathematische Überlegungen eine zu treffende Sachentscheidung beeinflussen können und es häufig tatsächlich tun sollten; dass es aber auch sehr gute Gründe dafür geben kann, sich gegen ein rechnerisches Ergebnis zu entscheiden. (Einen Mitarbeiter nicht zu entlassen, obwohl ein Automat kostengünstiger ist; bei der Familienbäckerei um die Ecke einzukaufen, obwohl dies etwas teurer als im Supermarkt ist; einen gemeinsamen Lohn auch dann zu halbieren, wenn

5.2

Über gerechte Aufteilungen

Vorüberlegungen

der Freund weniger geleistet hat; ...) Dies kann dann angemessen sein, wenn Handlungen nicht isoliert, sondern in sozialem Kontext gesehen werden. Dazu beschäftigen sich Kinder der 5. oder 6. Klasse in einer märchenhaften Erzählung mit der Frage, wie eine Belohnung zwischen Freunden „gerecht“ aufzuteilen sei.

Breiten Raum nimmt das unter dem Namen „force majeure“ oder auch „problème des partis“ bekannt gewordene Teilungsproblem ein. Dabei handelt es sich um kein aktuelles, drängendes Problem unserer Welt, sondern um ein theoretisches Problem: Ein Preis muss aufgeteilt werden. Es gibt mehrere Handlungsoptionen. Allerdings soll eine Aufteilung ausgewählt werden, die vertretbar gerecht genannt werden kann. Auf ethischen Pluralismus muss nicht eingegangen werden, denn es kann eine anerkannte ethische Norm für Gerechtigkeit zugrunde gelegt werden. Das Problem kann für Schüler zu einem exemplarischen Beispiel für ethische Entscheidungen werden.

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Aufteilung vorzunehmen. Kann eine oder sollten sogar mehrere „gerecht“ genannt werden? Lassen wir uns von der Nikomachischen Ethik des Aristoteles leiten, so erfahren wir: Recht ist das Gesetzliche und das der Gleichheit Entsprechende, das Unrecht ist das Ungesetzliche und das der Gleichheit Zuwiderlaufende. Wenn es um eine Geldverteilung geht, so muss sie dem Verhältnis entsprechen, das die Leistungen der Menschen zueinander hat. Dem entsprechend ist in der Rechtsphilosophie die folgende Aussage unstrittig: „Kern der Gerechtigkeit ist die Gleichheit: Gleiches ist gleich und Ungleiches entsprechend verschieden zu behandeln.“ [1]

Ethisch gerechtfertigt ist eine Verteilung, wenn sie von einer allgemein anerkannten Norm geleitet ist. Eine solche legen wir zugrunde: „Gleiches ist gleich und Ungleiches entsprechend verschieden zu behandeln“. Diese Norm lässt sich nicht wie ein Kochrezept anwenden. Allerdings gibt sie uns eine Orientierung. Ein Problem aber besteht darin, dass zwei Dinge dieser Welt niemals in jeder Hinsicht gleich sind. Es ist zu entscheiden, von welchen Aspekten abgesehen werden kann und welche Gegebenheiten so wesentlich sind, dass sie gleich oder proportional in Anschlag gebracht werden sollten. Liegen über wesentliche Größen keine Erkenntnisse vor, dann wird gelegentlich versucht, der Ungewissheit dadurch zu begegnen, dass solche Größen als gleich angenommen werden. Überlegungen, was im vorliegenden Fall gerecht sei, führen zu allgemein formulierten Handlungsanweisungen. Um diese in einer Aufteilung zu realisieren, kann rechnerisches Können benötigt werden. Dass die Rechnung korrekt durchgeführt wird, bedeutet allein noch keineswegs, dass die Aufteilung gerecht ist. Dies kann nur in einer Rechtfertigung der Handlungsanweisung entschieden werden. Eine Rechtfertigung ist nicht entweder richtig oder falsch, sie ist vertretbar oder nicht vertretbar.

Mathematiker kennen Sätze und Definitionen. In einer Definition werden aufwändig zu beschreibende Sachverhalte durch einen Namen ersetzt. „Ein Viereck heißt Sehnenviereck, wenn es einen Kreis gibt, auf dem die vier Eckpunkte des Vierecks liegen“, mag als Beispiel genannt sein. Vergleichen wir diese Definition mit der folgenden Aussage. „Ein Wettangebot heißt ‚fair‘, wenn die Gewinnerwartung jedes Spielers seinem Einsatz entspricht.“ Natürlich ist „fair“ ein Synonym für „gerecht“. Daher ist diese Aussage keine mathematische Definition, sie ist keine schlichte Namensgebung, sondern sie ist eine ethische Norm.

Einordnung:

Die Aufgaben sind dafür geeignet, den Unterricht in unterschiedlichen Klassenstufen zu vertiefen. Bei der Aufgabe 2 geht es um einen Erbfall. Eine in einem Testament geforderte Aufteilung muss mit geltendem Recht verträglich realisiert werden. In den Aufgaben 1 und 3 geht es um Aufteilungen, die gerecht sein sollen. Hier kann unter mehr oder weniger vertretbaren Aufteilungen gewählt werden. Weil es bei der Bewertung um Beratung und nicht um die Verordnung einer einzigen Lösung geht, eignen sich solche Aufteilungsprobleme in besonderer Weise dazu, mit Schülern das **Verhalten bei Diskussionen** einzuüben.

Über gerechte Aufteilungen

5.2

Vorüberlegungen

Jeder hat eine Vorstellung von Gerechtigkeit. Diese Vorstellungen sind oft unterschiedlich und gelegentlich nur emotional unterlegt. Sie können nur dann allgemeine Zustimmung finden, wenn zugrunde liegende Überlegungen offengelegt werden. Ein Weg ist, dass jeder Schüler eine Option auswählt und für diese eine knappe Rechtfertigung verfasst. Der Vorschlag kann vor der Klasse vorgelesen oder sogar in freier Rede vorgetragen werden. Danach wird darüber diskutiert, wobei Zweifel, Gegenvorstellungen, kritische Überprüfungen erwünscht sind. Während die Betroffenen im Leben oft sehr schnell zu einer Entscheidung kommen müssen, können wir im Unterricht **ohne Zeitdruck abwägen**. Da ethische Normen zwar keine Rezepte, wohl aber deutliche Orientierungen bieten, sind nicht alle Vorschläge konsensfähig, allerdings gibt es unterschiedliche vertretbare ethische Lösungen. Konsens wird darüber angestrebt, dass hier Dissens ausgehalten werden muss. Vorteilhaft kann ein freiwilliger Gesprächskreis mit einem Teil der Klasse sein. Wenn wirklich jedes Mitglied zu Wort kommen und seine Ansicht ohne Zwang zur Geltung bringen kann, entstehen Freude und Spontaneität. Da nur geringes rechnerisches Können benötigt wird, werden auch Schüler teilnehmen, die seither am Mathematikunterricht weniger interessiert waren. Gelegentlich mag es dann gelingen, gängige **Vorurteile über Mathematik zu revidieren**.

„Wahrscheinlichkeit“ kann in zwei verschiedenen Kontexten verwandt werden: In einem normativen, wenn es beispielsweise um Gerechtigkeit bei Glücksspielen geht, oder in einem empirisch-deskriptiven, wenn Realität beschrieben werden soll. Vieles spricht dafür, im Mathematikunterricht zum Einstieg den empirisch-deskriptiven Weg zu bevorzugen und Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten dadurch einzuführen, dass beobachtbare Versuchsausfälle gezählt werden. Vor allem zielt dieser Weg direkt auf Anwendungen bei Beschreibungen und Erklärungen von Erscheinungen in unserer Welt. Historisch entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung allerdings bei der Bearbeitung der ethischen und juristischen Frage, ob Wetten bei Glücksspielen und bei Geschicklichkeitsspielen gerecht (fair) genannt werden können. Diesem Aspekt widmen sich die Aufgaben 4 und 5.

Literatur:

- [1] Kaufmann, Arthur: *Grundprobleme der Rechtsphilosophie*, München 1994
 [2] Menninger, Karl: *Ali Baba und die 39 Kamele*, Köln 1989
 [3] BGB, Bürgerliches Gesetzbuch, Beck-Texte im dtv, München 1996

Die einzelnen Arbeitsblätter im Überblick:

Arbeitsblatt 1: Diese Aufgabe wird ab Klasse 5 viele Schüler interessieren und zu kreativen eigenen Überlegungen anregen. Solche für viele unerwartete Aufgaben sind geeignet, Interesse am Mathematikunterricht zu wecken. **(M1)**

Arbeitsblatt 2: Es geht um einen Erbfall. Der erste Teil ist eine Übungsaufgabe zu linearen Gleichungen. Im zweiten Teil wird geprüft, ob die berechnete Aufteilung mit geltendem Recht verträglich ist. Der dritte Teil wendet sich einer etwas anspruchsvolleren juristischen Fragestellung zu. **(M3)**

Arbeitsblätter 3.1 und 3.2:

Das unter dem Namen „force majeure“ bekannt gewordene Teilungsproblem kann als Gerechtigkeitsproblem behandelt werden, ohne dass dabei der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ erscheint. Nach unserer Erfahrung drängen Lernende zu keiner stochastischen Sichtweise, wenn das Problem außerhalb des Stochastikunterrichts angesprochen wird. Das Arbeitsblatt 3.1 enthält einfache, das Arbeitsblatt 3.2 etwas aufwändigere Lösungs-

5.2**Über gerechte Aufteilungen****Vorüberlegungen**

vorschläge; unter diesen ist auch der heute bevorzugte stochastische Ansatz.
(M7 und M8)

- Arbeitsblatt 4: Beim „problème des partis“ kommt es entscheidend auf die Art des Spieles an: Geht es um ein Geschicklichkeitsspiel oder um ein reines Glücksspiel? Handelt es sich um ein „Würfelspiel“, dann sind unterschiedliche Spielstärken der Spieler nicht ausgeschlossen, überdies können sich die Spielstärken von Runde zu Runde ändern. Falls ein solches Spiel als reines Glücksspiel behandelt wird, bei dem es per Definition keine unterschiedlichen Spielstärken der Spieler gibt, dann bedarf dies einer Rechtfertigung. Es dürfte zurzeit herrschende Meinung in der Schulmathematik sein, dass das unter dem Namen „problème des partis“ oder auch „force majeure“ bekannt gewordene Teilungsproblem mithilfe eines Laplace-Experimentes behandelt werden könne. Eine herrschende Meinung wird nicht immer hinterfragt. Eine Behandlung als Laplace-Experiment ist nur dann selbstverständlich angemessen, wenn in der Aufgabenstellung gesagt wird, jeder Spieler gewinne eine Runde mit der Wahrscheinlichkeit 0,5. Allerdings handelt es sich dann auch nicht um ein historisch bedeutsames Problem, das große Denker beschäftigt hat, sondern nur um eine nicht besonders hervorzuhebende Übungsaufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. (M11)
- Arbeitsblatt 5: Es handelt sich um Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mithilfe von Erwartungswerten wird überprüft, ob Glücksspiele und Wetten fair (gerecht) genannt werden können. (M13)