Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 8

Titel: Wer findet einen weiteren Lösungsweg? (29 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Die Arbeitsmaterialien dürfen nur persönlich für Ihre eigenen Zwecke genutzt und nicht an Dritte weitergegeben bzw. Dritten zugänglich gemacht werden. Sie sind berechtigt, für Ihren eigenen Bedarf Fotokopien in Klassensatzstärke zu ziehen bzw. Ausdrucke zu erstellen. Jede gewerbliche Weitergabe oder Veröffentlichung der Arbeitsmaterialien ist unzulässig.

- Die vollständigen Nutzungsbedingungen finden Sie hier.

Sekundarstufe

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:
Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de
Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach
Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377
http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

Wer findet einen weiteren Lösungsweg? 3.8

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erhalten geometrische Aufgaben, die mit ihren Kenntnissen auf mehreren unterschiedlichen Wegen erfolgreich bearbeitet werden können. Sie sind hier nicht damit zufrieden, ein Problem irgendwie gelöst zu haben, sondern werden dabei unterstützt, weitere alternative Lösungswege zu erproben.*
- *Es werden sieben geometrische Aufgaben vorgestellt, zu denen jeweils mehrere Lösungswege angedeutet werden, die Schüler selbstständig ausführen können.*
- *Die Schüler erfahren, dass „Wie* ***muss*** *ich diese mathematische Aufgabe bearbeiten?“ eine unangemessene Frage ist. Möglichst viele Schüler sollten als Antwort auf diese Frage versuchen, die Aufgabe auf mindestens zwei Wegen zu lösen.*

Zentrales Anliegen:

In der Mathematik gibt es zu einem lösbaren Problem im Allgemeinen viele unterschiedliche Lösungswege. Es widerstrebt Menschen in individuell verschiedenem Grade, ein in vertrautem Zusammenhang behandeltes Problem später mit neuem Wissen anzugehen. Mathematisches Können kann aber dadurch **nachhaltig** gefördert werden, dass es Schülern ermöglicht wird, ein Problem mehrmals zu bearbeiten. Mathematik ist weniger ein Lernfach als ein „Tunfach“. Werden mannigfache Lösungswege gefunden, in der Klasse vorgestellt und gemeinsam bewertet, dann kann bei Schülern Freude aufkommen – dann wird in der Tat gelegentlich **Lust an eigenem Denken** erlebt werden. Dies ist das wertvollste Ziel unseres Mathematikunterrichts.

Werden Schüler dazu angehalten, gelegentlich alternative Lösungswege zu überlegen, dann sind natürlich auch alle Umwege nützlich und lobenswert. Einen eingeschlagenen aufwendigen Weg eventuell mühsam zu Ende zu führen, ist unbedingt eine anerkennenswerte Leistung, bei der wertvolles **Durchhaltevermögen** gestärkt wird. Natürlich werden die unterschiedlichen Lösungswege dann der Klasse präsentiert, um bewertet zu werden. Zu Recht ist „Bewerten“ die sechste und damit nicht nur die anspruchsvollste, sondern auch die wertvollste Bloom’sche Kategorie. Vielen Schülern kann deutlich werden, dass es in der Mathematik nicht angemessen ist, ein behandeltes Thema nach der zugehörigen Klassenarbeit als erledigt anzusehen und wie selbstverständlich zu vergessen. Bei den hier vorgestellten unterschiedlichen Lösungswegen werden Grundaussagen benutzt, die eigentlich immer präsent sein sollten.

Lehrkräfte wissen, dass Eltern eher leistungsschwacher Schüler immer wieder fordern, dass nur ein Standardlösungsweg unterrichtet wird: „Mehrere Lösungswege verwirren unsere Schüler. Es ist schwer genug, einen klar vorgezeichneten Lösungsweg nachzuvollziehen. Es sollen nicht alle jungen Menschen Mathematiker werden.“ Diese Aussage mag dann durchaus angemessen sein, wenn von dem Kind eine zentrale Prüfung knapp bestanden werden soll, denn in solchen Prüfungen müssen meist in weitem Umfang einfache Routineaufgaben in knapper Zeit bearbeitet werden. Wird allerdings angestrebt, Schülern im Mathematikunterricht Durchblick und Überblick zu ermöglichen, dann genügt es, wenn in wenigen Unterrichtsstunden vor einer zentralen Prüfung Routineverfahren zielgerichtet zusammengestellt werden. Dabei kommen eher schwache Schüler zu ihrem Recht. Überdies werden viele Schüler mit Selbstvertrauen in Prüfungen gehen, Routineaufgaben rasch und sicher erledigen, genügend Zeit für untypische Fragen gewonnen haben und hervorragende Ergebnisse erzielen. Dass dies so ist, haben wir jahrzehntelang ausnahmslos erleben dürfen.

3.8	Wer findet einen weiteren Lösungsweg?

Vorüberlegungen

Einordnung:

Es werden sieben geometrische Aufgaben vorgestellt, zu denen es jeweils mehrere Lösungswege gibt. Dabei werden jeweils einige, aber gewiss nicht alle Lösungswege angegeben. Am Ende einer Lehreinheit können Schüler nicht nur erleben, dass das soeben Gelernte ihre Möglichkeiten erweitert, Aufgaben erfolgreich zu lösen, sie können auch erfahren, dass zurückliegende einfache geometrische Sachverhalte gelegentlich elegante Wege eröffnen können. Dabei ergeben sich auch Möglichkeiten, über Methoden zu reflektieren. Beispielsweise gelten Überlegungen an ähnlichen Dreiecken als nicht ganz einfach, stehen Winkelfunktionen zur Verfügung, dann können sie gelegentlich durch ein einfaches Verfahren ersetzt werden.

Im Folgenden werden detaillierte Angaben zu den einzelnen Aufgaben geboten. In den Aufgabenstellungen werden jeweils mehrere Lösungswege angedeutet. Die vorgenommene Nummerierung soll keine Wertung beinhalten. Die Lösungen sind so breit dargestellt, dass sie auch für Schüler geeignet sind.

Die einzelnen Beispiele im Überblick:

1. Beispiel: Winkel in Dreiecken
2. Beispiel: Kreistangenten
3. Beispiel: Flächensätze bei rechtwinkligen Dreiecken
4. Beispiel: Liegen drei Punkte auf einer Geraden?
5. Beispiel: Ein Kreis
6. Beispiel: Eine Flächenberechnung
7. Beispiel: Ist das Dreieck gleichschenklig?

Wer findet einen weiteren Lösungsweg?	3.8

Unterrichtsplanung

1. Beispiel: Winkel in Dreiecken

Zuerst wird dazu angeregt, einen aufwendigen Lösungsweg einzuschlagen. Der Satz über Außenwinkel in Dreiecken wird gelegentlich nicht oder nur am Rande behandelt. Der 2. Lösungsweg ist angemessen, wenn dieser Satz nicht parat ist. Er erlaubt eine elegante Lösung. Beim 3. Lösungsweg können die Schüler erfahren, dass vertiefte Kenntnis der Schlüssel dazu sein kann, ein Problem rechnungsarm im Kopf zu lösen. (**Arbeitsblatt 1**, **M1**; **Lösungen** siehe **M2**)

2. Beispiel: Kreistangenten

Es ist angemessen, wenn bei der Konstruktion eines rechten Winkels über einer Strecke vor allem an den Satz von Thales gedacht wird.
Vorgegeben sind ein Kreis und ein Punkt außerhalb des Kreises. Es sollen die Kreistangenten konstruiert werden, die durch den Punkt gehen. Dies ist eine Routineaufgabe, die im Allgemeinen mithilfe eines Thaleskreises erledigt wird. Gerade bei Routineaufgaben mag es besonders reizvoll sein, diese auch auf mehreren unkonventionellen Wegen zu lösen. Benutzt werden gleichschenklige Dreiecke, Drehungen und Kongruenzsätze. (**Arbeitsblatt 2**, **M3**; **Lösungen** siehe **M4 und M5**)

3. Beispiel: Flächensätze bei rechtwinkligen Dreiecken

Es ist angemessen, bei Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken zuerst an den Satz von Pythagoras zu denken.
Steht nur der Satz von Pythagoras zur Verfügung, dann sind hier umfangreiche Rechnungen erforderlich. Können neben dem Satz von Pythagoras auch der Kathetensatz und der Höhensatz herangezogen werden, vereinfacht dies die Rechnung deutlich.
Bei den Flächensätzen an rechtwinkligen Dreiecken ist es sinnvoll, zum Satz von Pythagoras, dem Kathetensatz und dem Höhensatz auch die Aussage über den doppelten Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks im Auge zu behalten. Dann kann die vorliegende Aufgabe mit einer Kopfrechnung erledigt werden. Die gleiche Formel kann mithilfe des 3. Ähnlichkeitssatzes gewonnen werden. Die dabei erforderlichen Betrachtungen sind für Lernende erfahrungsgemäß nicht ganz einfach nachvollziehbar. Die erforderlichen Überlegungen können durch den angenehmen Einsatz von Winkelfunktionen deutlich erleichtert werden. (**Arbeitsblatt 3**, **M6**; **Lösungen** siehe **M7 und M8**)

4. Beispiel: Liegen drei Punkte auf einer Geraden?

Es gibt mehrere Eigenschaften, die jeweils dafür hinreichend sind, dass drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Werden Streckenlängen herangezogen, dann kann das Problem mithilfe des Satzes von Pythagoras gelöst werden. Allerdings ist die dabei erforderliche Rechnung für Schüler keinesfalls trivial. Wird der Tangens benutzt, mag die erforderliche algebraische Umformung als Routineumformung angesehen werden. Dies wird noch deutlicher, wenn die Gleichung einer Ursprungsgeraden herangezogen werden kann.
Werden Winkel zur Kennzeichnung benutzt und erinnern sich Schüler an elementare geometrische Aussagen, dann sind die Lösungswege angenehm einfach. (**Arbeitsblatt 4**, **M9**; **Lösungen** siehe **M10 und M11**)

3.8	Wer findet einen weiteren Lösungsweg?

Unterrichtsplanung

5. Beispiel: Ein Kreis

Dieses Problem ist geeignet, nach der Einführung der Winkelfunktionen mannigfache Inhalte der Elementargeometrie zu wiederholen. Verschiedene Ansätze führen mit unterschiedlichem Aufwand zum Erfolg. Geometrische Einsicht kann gewonnen werden, wenn die Fragestellung so umformuliert wird, dass nur gleichartige Forderungen gestellt werden. (**Arbeitsblatt 5**, **M12**; **Lösungen** siehe **M13 bis M17**)

6. Beispiel: Eine Flächenberechnung

Auch dieses Problem ist für einen Überblick geeignet, der weite Teile der Schulgeometrie in Erinnerung rufen kann: Winkelfunktionen, zentrische Streckungen, Strahlensätze können benutzt werden, analytische Geometrie der Geraden ermöglicht einen eleganten Lösungsweg. (**Arbeitsblatt 6**, **M18**; **Lösungen** siehe **M19 bis M22**)

7. Beispiel: Ist das Dreieck gleichschenklig?

Ein Dreieck heißt gleichschenklig, wenn es zwei gleich lange Seiten hat. Ein Dreieck ist als gleichschenklig erkannt, wenn gezeigt ist, dass es zwei gleich große Innenwinkel hat.
Schülern soll ein beeindruckendes Beispiel dafür gegeben werden, dass es angemessen sein kann, vor vergleichsweise aufwendigen trigonometrischen Umformungen auf elementare Weise die Größen von Winkeln zu berechnen. (**Arbeitsblatt 7**, **M23**; **Lösungen** siehe **M24 und M25**)

