Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 10

Titel: Zum Simpson-Paradoxon (30 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Die Arbeitsmaterialien dürfen nur persönlich für Ihre eigenen Zwecke genutzt und nicht an Dritte weitergegeben bzw. Dritten zugänglich gemacht werden. Sie sind berechtigt, für Ihren eigenen Bedarf Fotokopien in Klassensatzstärke zu ziehen bzw. Ausdrucke zu erstellen. Jede gewerbliche Weitergabe oder Veröffentlichung der Arbeitsmaterialien ist unzulässig.

- Die vollständigen Nutzungsbedingungen finden Sie hier.

Sekundarstufe

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de

Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG

E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach

Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377

http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

MEDIENGRUPPE OBERFRANKEN FACHVERLAGE

Zum Simpson-Paradoxon	5.5

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler sollen dem weit verbreiteten Vorurteil „Es gibt einfache Lügen, verdammte Lügen und Statistiken" nicht hilflos ausgeliefert sein. Allerdings sollen sie wissen, dass sowohl Fehlinterpretationen als auch Missbrauch von Datenmengen vorkommen.*
- *Die Schüler verstehen, warum das Simpson-Paradoxon leicht zu Fehlinterpretationen führen oder auch für solche missbraucht werden kann.*
- *Die Schüler üben, berechnete Prozentwerte zu bewerten und eventuell auftauchende Ungereimtheiten aufzulösen. Dabei bekommen sie Gelegenheit, ihre Einsichten zu begründen und gegebenenfalls auch in Diskussionen zu vertreten.*
- *Die Schüler vertiefen ihr Wissen über den Unterschied zwischen gemeinen Brüchen (bei denen es auf den Nenner ankommt) und Bruchzahlen (rationalen Zahlen) wesentlich.*

Zentrales Anliegen:

Das bewusste **Wahrnehmen von Realität** kann ein erster **Schritt zum Verstehen** sein. Dies dürfte besonders intensiv stattfinden, wenn Unerwartetes wahrgenommen wird. Deshalb haben Paradoxien im Mathematikunterricht ihren besonderen Wert. Das gilt allerdings nur dann, wenn die Auflösung der Paradoxie für Schüler nachvollziehbar ist. Das Simpson-Paradoxon kann diese Forderung erfüllen. Statistische Erhebungen liefern Datenmengen, mit denen Prozentsätze berechnet werden können. Es ist nicht immer einfach, diese so zu interpretieren, dass die Realität erfasst wird und nicht Vorurteile scheinbar gestützt werden.

Das griechische Wort *paradox* bedeutet „entgegen der Meinung bzw. Lehre", es meint „scheinbar widersinnig". Eine gut begründete Aussage steht unerwartet im Widerspruch zu einer anderen, die bis dato deshalb für selbstverständlich gehalten wurde, weil sie dem gesunden Menschenverstand oder der herrschenden Meinung zu entsprechen schien. Da sich der scheinbare Widerspruch bei einer genaueren Analyse auflöst, darf ein paradoxes Paar von Aussagen nicht mit zwei kontradiktorischen Aussagen „A" und „Nicht-A" verwechselt werden, die die Mathematik widerspruchsvoll machen würden (siehe dazu die Bemerkung unter **M25**).

Auch für junge Schüler durchschaubar ist das 1951 von dem Mathematiker Simpson analysierte und nach ihm benannte Simpson-Paradoxon. Damals wurden der bei einem Aufnahmeverfahren einer amerikanischen Universität anfallenden Datenmenge angeblich die folgenden kontradiktorischen Aussagen entnommen: „Frauen werden benachteiligt." – „Frauen werden nicht benachteiligt."

Es geht uns im Folgenden nicht um die an für sich berechtigte Frage, ob allein die berechneten Differenzen der Prozentsätze der Ablehnungen weiblicher Aufnahmeanträge ohne weitere Analyse des Aufnahmeverfahrens als ausreichend angesehen werden können, um von Benachteiligung zu reden. Dies sei dahingestellt. Hier geht es nur um die Überraschung, dass es scheinbar möglich war, den Daten zwei entgegengesetzte Aussagen zu entnehmen, ohne dabei die Daten zu verfälschen oder einen Rechenfehler einzubauen.

Ein Schlüssel zur Auflösung des Widerspruchs liegt in der **Verwendung des Begriffs** *Frauen*. Die Gesamtheit der Personen, die unter den Begriff *Frauen* fällt (der Umfang, die Extension dieses Begriffs) ist in beiden Aussagen verschieden. Werden beide Aussagen zusammengefasst, handelt es sich also gar nicht um eine unzulässige Aussage „A und Nicht-A", sondern um eine vollkommen andere Aussage „A und Nicht-A*", bei der in der Aussage „A" und auch in der Aussage „A*" zwar beide Male der Begriff *Frauen* enthalten ist, dieser Begriff aber nicht das Gleiche bedeutet, da er nicht die gleiche Extension hat.

5.5	Zum Simpson-Paradoxon

Vorüberlegungen

Aus dem Datenmaterial werden, ausführlich formuliert, tatsächlich nur die beiden folgenden Aussagen gewonnen: „Beim gesamten Aufnahmeverfahren wurden von den Bewerbungen prozentual mehr Frauen als Männer abgelehnt." „Beim Aufnahmeverfahren wurden von den Bewerbungen in allen beteiligten Fachbereichen jeweils prozentual weniger Frauen als Männer abgelehnt." Bei der ersten Aussage wird die Menge aller beim gesamten Aufnahmeverfahren beteiligten Frauen zugrunde gelegt. Die zweite Aussage ergibt sich, wenn diese Menge in zwei Teilmengen zerlegt wird: Die Teilmengen unterwerfen sich jeweils deutlich unterschiedlichen Verfahren. Dass nicht nur geringfügig unterschiedliche, sondern sogar sich widersprechende Aussagen abgeleitet werden können, je nachdem, ob die gesamte Menge oder die in Teilmengen zerlegte Menge statistisch untersucht wird, ist allerdings sehr überraschend und verdient es durchaus, paradox genannt zu werden.

Es soll geklärt werden, unter welchen Bedingungen solche paradox anmutenden Erscheinungen auftreten können. Wird das Simpson-Paradoxon missbraucht, dann besteht die Unwahrheit nicht darin, dass etwas Falsches gesagt wird, sondern darin, dass das Ergebnis einer Untersuchung verkürzt formuliert wird. Die volle Wahrheit wird nicht schon dann mitgeteilt, wenn keine Unwahrheit behauptet wird, sondern erst dann, wenn überdies nichts verschwiegen wird. Eine alltägliche Erfahrung kann sein, dass bei Diskussionen eine Partei zur Unterstützung der eigenen Position auf das Ergebnis einer statistischen Untersuchung verweist und die Gegenpartei auf das kontradiktorische Ergebnis einer ihr bekannten anderen statistischen Untersuchung. Wird beides von den Beteiligten stillschweigend akzeptiert, erhebt sich der Verdacht, das eigentliche Ziel der Veranstaltung bestehe nicht darin, die Sache zu klären, sondern keinem Beteiligten zu nahe zu treten. Die Kontrahenten können durchaus aufgefordert werden, Details der von ihnen ins Feld geführten Untersuchungen zu nennen, die einem kundigen Beobachter zumindest Anhaltspunkte dafür liefern, ob die jeweils zitierte Untersuchung überhaupt ein geeignetes Hilfsmittel sein kann, das behauptete Ergebnis zu stützen.

Mathematikunterricht darf sich nicht auf das Rechnen beschränken, sondern muss überdies dazu anleiten, ermittelte Rechenergebnisse zu prüfen und gegebenenfalls kritisch zu interpretieren. Dadurch kann Mathematikunterricht dazu verhelfen, **sich in der Welt besser zurechtzufinden**. Unterricht, der wesentlicher wird, wird im Allgemeinen auch etwas schwieriger. Können sich Lernende tieferes Wissen aneignen und dieses in Diskussionsbeiträgen erfolgreich einbringen, dürfte Freude aufkommen und das Zutrauen in eigene Fähigkeiten nachhaltig gestärkt werden. Interpretationen von Datenmengen müssen beim Simpson-Paradoxon nicht entweder wahr oder falsch sein, sie können durchaus konsensfähig oder eben nicht vertretbar sein. Ziel dieser Arbeitsblätter ist es, dass sich Schüler das **Verständnis für ein wichtiges statistisches Paradoxon** so einfach wie möglich erarbeiten können – aber auch nicht einfacher!

Einordnung:

Üblicherweise kommt im Mathematikunterricht das Simpson-Paradoxon allenfalls bei der Statistik in der Sekundarstufe II vor. Dies ist keinesfalls zwingend, denn an rechnerischem Können muss nur etwas Bruchrechnung und die Berechnung von Prozentwerten gefordert werden. Daher wird bei den vorliegenden Arbeitsblättern auf Wahrscheinlichkeiten ganz verzichtet. Dieses Material möchte und kann das **Prozentrechnen bereichern** und geht dabei vermutlich ein wenig über das Übliche hinaus. Hier kann auch der Unterschied zwischen einer Bruchzahl (rationalen Zahl) und einem gemeinen Bruch überzeugend herausgearbeitet werden. Die Art, wie aus der Diskussion des Simpson-Paradoxons heraus ein anderer Blick auf Brüche gewonnen wird, kann die Schüler **Mathematik real erleben lassen.** Sie erleben, wie in der Mathematik neue Wege entstehen.

Allerdings sollte die Entwicklung der Kinder so weit fortgeschritten sein, dass Analysieren, Begründen und Argumentieren geübt werden können. Die Beispiele stammen aus dem Erfahrungsbereich der Kinder, sodass sie in der Lage sein werden, begründet zu entscheiden, welche der beiden sich gegenseitig

Zum Simpson-Paradoxon	5.5

Vorüberlegungen

ausschließenden Interpretationen einer Datenmenge jeweils vertretbar ist. Da es hier keine allgemeingültige Regel gibt und es stets auf den Einzelfall ankommt, handelt es sich jeweils um eine **herausfordernde Aufgabe**, die aber lösbar ist.

Das vorliegende Material kann unterschiedlich eingesetzt werden. Einzelne Arbeitsblätter können den Unterricht bei der Prozentrechnung bereichern. Es kann auch ein der Lerngruppe angemessener Lehrgang zum Simpson-Paradoxon zusammengestellt werden. Dabei ist mit dem angebotenen Material jede gewünschte sinnvolle Vertiefung erreichbar. Ein solcher Lehrgang gibt den Schülern auf dem aktuell verstärkt geforderten Gebiet **Daten und Zufall** einen **wesentlichen und lebensrelevanten Einblick** mit.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Paradoxe Aussagen
2. Schritt: Zur Einführung
3. Schritt: Das Simpson-Paradoxon
4. Schritt: Ein Streitgespräch
5. Schritt: Mathematische Durchdringung
6. Schritt: Wir planen eine Täuschung

Zum Simpson-Paradoxon	5.5
Unterrichtsplanung	

1. Schritt: Paradoxe Aussagen

Begriffe haben einen Umfang, eine Extension, sie erfassen die Gesamtheit der Objekte, die unter diese Bezeichnung fallen. Unbedingt beachtet werden soll, dass ein Begriff nicht in jeder Aussage die gleiche Menge von Objekten erfassen muss. Mancherlei scheinbare Widersprüche lösen sich auf, wenn die enthaltenen Begriffe bestimmt sind, wenn genau geklärt ist, was jeweils gemeint ist. Dieses Wissen ist an sich nützlich und ein wesentlicher Schritt auf dem Weg, das Simpson-Paradoxon zu verstehen. (**Arbeitsblatt** siehe **M1**, **Lösung** siehe **M2**)

2. Schritt: Zur Einführung

Die Schüler erhalten Textaufgaben mit teilweise erstaunlichen (paradoxen) Ergebnissen. Es wird deutlich, dass es Situationen gibt, in denen Rechenergebnisse durchaus dem gesunden Menschenverstand zu widersprechen scheinen. (**Arbeitsblätter** siehe **M3 und M4**, **Lösungen** siehe **M5 und M6**)

3. Schritt: Das Simpson-Paradoxon

Ein verwundertes Kopfschütteln der Schüler über ihre Rechenergebnisse soll nicht das Ende, sondern der Anfang eines Mathematikunterrichts sein, in dem verstanden wird, wie paradoxe Ergebnisse zustande kommen können. Zugrunde liegt jeweils eine Datenmenge. Um daraus kennzeichnende Größen zu gewinnen, wird eine Auswahl oder Zusammenfassung von Daten vorgenommen. Dies geschieht beim Simpson-Paradoxon jeweils auf zweierlei Weise. Obwohl weder Daten gefälscht noch Rechenfehler eingebaut werden, können sich dabei unterschiedliche Interpretationen der ermittelten Daten ergeben. Dann sollte entschieden werden, welche Aussage der Situation angemessen genannt werden kann. (**Arbeitsblätter** siehe **M7 und M9**, **Lösungen** siehe **M8 und M10**)

4. Schritt: Ein Streitgespräch

Ein erstes Verständnis des Simpson-Paradoxons kann von Schülern in einem vor der Klasse geführten Streitgespräch vertieft werden. Die zugrunde liegende Situation lehnt sich der historischen Situation an, die den Mathematiker Simpson veranlasst hat, das später nach ihm benannte Paradoxon zu analysieren. Durch fehlerfreie Rechnungen, aber eine unterschiedliche Auswahl der Daten entstehen zwei sich scheinbar widersprechende Aussagen. Keine dieser Aussagen kann vollkommen falsch genannt werden. Allerdings muss entschieden werden, welche Aussage vertretbar (konsensfähig) ist. Diese Entscheidung kann von der Klasse nach einer Diskussion durch eine Abstimmung angemessen getroffen werden. (**Arbeitsblätter** siehe **M11 bis M13**)

5. Schritt: Mathematische Durchdringung

Nun soll das Verständnis vertieft werden. Dazu werden zwei Wege angeboten. Rechnerische Argumente zeigen, dass eine Darstellung der Anteile mithilfe von Prozentwerten die Situation verschleiern kann. Es bringt Vorteile, keine Bruchzahlen zugrunde zu legen, sondern Brüche, bei denen es auf die Nenner ankommt. (**Arbeitsblatt** siehe **M14**)

