Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 13

Titel: Über wundersame Veränderungen von Flächeninhalten (32 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de
Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach
Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377
http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

MEDIENGRUPPE OBERFRANKEN
FACHVERLAGE

Über wundersame Veränderungen von Flächeninhalten	4.5

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler beobachten ein geometrisches Zauberkunststück, nehmen Überraschendes wahr und können zuerst nur staunen. Nach einigem Nachdenken gibt ihnen ihr geometrisches Wissen die Sicherheit, dass eine Täuschung vorliegen muss. Unverzagt können sich Schüler gemeinschaftlich oder einzeln um eine Klärung bemühen. Dabei erfahren sie, dass aus dem Unterricht bekannte einfache geometrische Aussagen ausreichen, den Zaubertrick so aufzudecken, dass keine Zweifel bleiben.*
- *Die Schüler sind danach in der Lage, eine ihnen bekannte Zauberei auch vor Eltern erfolgreich durchzuführen und bei Bedarf die Situation mit geometrischen Argumenten zu klären.*
- *Einigen Schülern wird es gelingen, kreativ weitere geeignete Figuren zu entwickeln und eine eigene magische Schau erfolgreich zu präsentieren.*

Zentrales Anliegen:

In der Unterhaltungsmathematik sind **mathematische Zauberkunststücke** bekannt. Dazu gehören auch wundersame Veränderungen von Flächeninhalten. Dabei handelt es sich um geometrische Experimente, die auch Schüler ohne große Mühe einem kleinen Kreis vorführen können – bei sorgfältiger Vorbereitung können sie in größerem Rahmen erfolgreich demonstriert werden. Bei geometrischen Zaubereien ist es vorteilhaft, dass die paradoxen Ergebnisse nicht nur kurzzeitig wahrnehmbar sind, sondern beliebig lange für jeden sichtbar herausfordernd vorliegen.

Zuerst wird eine Figur vorgelegt. Diese kann auf Papier oder an die Tafel gezeichnet sein, sie darf auch aus Karton ausgeschnitten oder aus Sperrholz ausgesägt werden. Unverzichtbar ist, dass alle Zuschauer überzeugt werden, den Flächeninhalt der Figur mühelos berechnen zu können. Danach wird diese Ausgangsfigur graphisch zerlegt oder zerschnitten. Aus den Teilstücken wird vor aller Augen eine neue Figur zusammengesetzt. Alle Beobachter sind intuitiv davon überzeugt, dass beide Figuren den gleichen Flächeninhalt haben müssen. Dazu bedarf es nicht einmal der geometrischen Begründung, dass Bewegungen nicht nur längen- und winkeltreu, sondern auch flächentreu sind. Doch wird Unerwartetes beobachtet! Der Zauberer scheint allein durch Zerlegen und neues Zusammensetzen Flächeninhalte von Flächenstücken verändern zu können. Viele Zuschauer sind verwirrt, staunen, sind sprachlos, aber einige stellen auch Fragen, um das hinter dem Kunststück stehende Geheimnis zu ergründen. Solche Fragen können mithilfe einfacher geometrischer Argumente von den Schülern überzeugend beantwortet werden. Voll verstanden ist so ein Zaubertrick gewiss von dem, der ihn nicht nur mit den vorgegebenen, sondern mit selbst entwickelten Figuren vorführen und angemessen besprechen kann. Was zuerst als unergründlich rätselhafte Zauberei erscheint, kann für viele Schüler nach elementaren geometrischen Analysen zum heiteren Hokuspokus werden. Ein Hokuspokus ist etwas, bei dem hinter viel äußerem Aufwand nichts weiter steckt – allerdings soll und kann er mit viel Freude präsentiert werden. Freude ist allerdings mehr als Spaß, sie ist verdienter Lohn für individuelle Anstrengung.

Um eine solche Zauberei überhaupt durchführen zu können, muss eine geeignete Figur zur Verfügung stehen. Zauberlehrlinge werden einen „Meister der Zauberei" bitten, ihnen die vermutlich streng geheimen Daten einer magischen Figur ausnahmsweise zu verraten. Haben sie geeignete Daten erfahren, sind sie zufrieden, denn nun kann auch ihnen eine erfolgreiche Demonstration gelingen. Falls Zuschauer Erklärungen fordern sollten, verweisen sie auf die strenge Verpflichtung zur Geheimhaltung und auf die Autorität des Meisters – vermutlich hat dieser sein Geheimnis von einem älteren Meister. Es genügt, die vom Meister mitgeteilten Daten zu wissen und geschickt umzusetzen – man muss nicht alles durchschauen, um sein Handwerk angemessen ausführen zu können. Für Mathematikschüler ist diese Haltung allerdings keinesfalls akzeptabel. Sie wissen, dass hinter jeder magischen Flächenverwandlung

4.5	Über wundersame Veränderungen von Flächeninhalten

Vorüberlegungen

eine erfolgreiche Täuschung stecken muss. Überdies erwarten sie, dass der Zaubertrick mithilfe geometrischer Aussagen von jedem durchschaut werden kann, der bereit ist, sich darum zu mühen. Da nur sehr einfache, aus dem Unterricht bekannte Kenntnisse benötigt werden, kann dies auch gelingen.

Einordnung:

Der Rechtsanwalt William Böttcher hat an der amerikanischen Unabhängigkeitserklärung aktiv mitgearbeitet. Dieser bedeutende Politiker beschrieb 1774 vermutlich als Erster eine wundersame Flächenverwandlung. Sie ist für ihn ein Beleg dafür, dass **menschliche Wahrnehmung getäuscht** werden kann. Der Titel seiner Schrift mag zum Nachdenken anregen, er nennt sie „Rationale Erholungen". In der Tat gab und gibt es immer wieder Menschen, die bei der Beschäftigung mit Mathematik Erholung finden. Die Lehrer können den Weg dazu ebnen – es gibt mannigfache geeignete köstliche Mathematik.

Wird mit kräftigen Linien auf kariertes Papier gezeichnet, können solche Zaubereien erfolgreich einem kleineren Kreis demonstriert werden. Dabei wird ausgenützt, dass Beobachter geneigt sind, nahe bei einem Gitterpunkt liegende Punkte irrtümlich als Gitterpunkte wahrzunehmen. Danach können die Zuschauer Längen mühelos wahrnehmen, ohne diese penibel nachmessen zu wollen. Die wahrgenommenen Daten sind so eingerichtet, dass die Flächeninhalte im Kopf berechnet werden können. Zur Vorführung vor einem größeren Kreis kann eine vorbereitete Kreidezeichnung Mittel der Wahl sein, denn eine solche wird von Haus aus mit eher breiten Strichen angelegt. Eine geschickt angefertigte Freihandzeichnung kann in besonders delikaten Situationen das Mittel der Wahl sein. Welche Präsentationsform auch immer gewählt wird, dem Publikum müssen Ungenauigkeiten verborgen werden. Dies erfordert einen geübten Magier.

Solche Zaubereien können im Mathematikunterricht an unterschiedlichen Stellen wertvoll werden. Es sollen Beispiele genannt werden:

1. Mit einer entsprechenden Demonstration wird belegt, dass Zerlegungsbeweise sorgfältig geprüft werden müssen, um zu **sicheren geometrischen Aussagen** zu gelangen.
2. Die Lehrkraft kann eine Zauberei vorführen und dazu auffordern, genau zu beobachten und im Kopf mitzurechnen. Schon dies ist wertvoll. Dass Widersprüche wahrgenommen werden, veranlasst viele Schüler nachzudenken und vielleicht sogar weiter zu forschen. Wer sich darauf einlässt, kann erfolgreich sein und dabei mit Lust Geometrie treiben.
3. Der Mathematikunterricht kann mit interessanten Vorhaben **in der Schule sichtbar gemacht werden**. Schüler können solchen geometrischen Hokuspokus Mitschülern, Schülern anderer Klassen, aber auch Eltern mit viel Spaß erfolgreich vorführen. Sind sie überdies in der Lage, den Zaubertrick zu erklären, werden sie Lob und Anerkennung erfahren. Sie erleben, dass mathematische Aussagen nicht in Zweifel gezogen werden können und daher Sicherheit bei der Argumentation geben. Zu Recht sind sie stolz, wenn sie sogar selbst entwickelte Figuren erfolgreich präsentieren können.

Literatur:

- Euklid: Die Elemente, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1973
- Gardner, Martin: Mathematik und Magie, Du Mont Buchverlag, Köln 1981

Über wundersame Veränderungen von Flächeninhalten	4.5

Vorüberlegungen

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Zerlegungsbeweise
2. Schritt: Michael zaubert
3. Schritt: Ein Zaubertrick
4. Schritt: Weitere Ausgangsfiguren
5. Schritt: Ein Schachbrett-Paradoxon für einen Elternabend

Über wundersame Veränderungen von Flächeninhalten	4.5

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Zerlegungsbeweise

Die folgenden Beispiele können nur dann als überraschend oder gar aufregend erlebt werden, wenn der scheinbar verletzte, unbestreitbare geometrische Sachverhalt wirklich vertraut ist.
Schüler sollen zwei historische Wege kennen, zu geometrischen Sätzen zu gelangen: Eine Methode ist, eine suggestive Figur mit der schlichten Aufforderung „Sieh! Was stellst du fest?" vorzulegen. Die Wahrnehmung wird dabei als hinreichend dafür angesehen, zu geometrischen Aussagen zu gelangen. Die andere Methode ist, eine an einer nicht besonders suggestiv ausgewählten Figur gewonnene vorläufige Vermutung sorgfältig mithilfe geometrischer Sätze zu belegen. Dieses „griechische Beweisverfahren" ist zwar gelegentlich durchaus mühsam, aber unverzichtbar, so eine sichere Aussage gewonnen werden soll. (**M1** bis **M3**)

2. Schritt: Michael zaubert

Schüler können ein Zauberstück in kleinem oder auch größerem Kreis vorführen. Falls die Strahlensätze noch nicht bekannt sind, wird hier zu einer ersten Klärung nur Proportionalität benötigt. Martin Gardner hat 1956 entsprechende Figuren veröffentlicht. (**M4** bis **M6**)

3. Schritt: Ein Zaubertrick

Hier wird ein Trick vorgestellt, der hinter einer unglaublichen Flächenveränderung steckt. Dabei kann die geometrische Situation von der Form der Präsentation abhängen: Werden Figuren ausgeschnitten oder wird die Zauberei graphisch demonstriert? Es kann Schülern gelingen, beliebig viele geeignete Figuren dieser Art selbst zu finden, angemessen zu bewerten und erfolgreich bei magischen Vorführungen einzusetzen. (**M7** bis **M14**)

4. Schritt: Weitere Ausgangsfiguren

Ausgangsfiguren können mehr oder weniger raffiniert gewählt werden. Das lässt viele kreative Einfälle zu. Ein Beispiel leitet zu einem klassischen „Schachbrett-Paradoxon" über.
(**M15** bis **M16**)

5. Schritt: Ein Schachbrett-Paradoxon für einen Elternabend

Dieses Paradoxon eignet sich, auch Eltern vorgeführt zu werden. Es ist aspektreich und berührt mannigfache Themen, über welche ergänzend und ausschmückend referiert werden kann. Das griechische Wort „paradox" bedeutet „scheinbar widersinnig". Eine gut begründete Aussage steht unerwartet im Widerspruch zu einer anderen, die bis dato deshalb für selbstverständlich gehalten wurde, weil sie dem „gesunden Menschenverstand" entsprach. Dieser scheinbare Widerspruch kann durch eine genauere Analyse aufgelöst werden. Der Mathematik-Zauberer Sam Loyd berichtete, er habe sein Schachbrett-Paradoxon 1858 den staunenden Mitgliedern eines Schachkongresses vorgeführt. Bei der im Mathema-

