Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 14

Titel: Zur Division durch die Zahl Null (27 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Sekundarstufe

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de
Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach
Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377
http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

MEDIENGRUPPE OBERFRANKEN
FACHVERLAGE

Zur Division durch die Zahl Null	1.16

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler verstehen, was mit folgender Feststellung gemeint ist: „Die Division durch Null ist nicht definiert.“*
- *Sie sollen am Beispiel „Division durch Null“ erfahren, dass in ein System mathematischer Aussagen eine weitere Definition nur dann aufgenommen werden kann, wenn das Gesamtsystem widerspruchsfrei bleibt.*
- *Sie erkennen, wenn für einen angeblichen Beweis einer offensichtlich unsinnigen Aussage die falsche Aussage „Es gilt $0 : 0 = 1$.“ in Anschlag gebracht wird.*

Zentrales Anliegen:

Die Division durch Null ist nicht „verboten“. Es gibt kein Gesetzbuch, in dem die Division durch Null unter Strafe gestellt wird. Die Division durch Null ist allerdings „nicht definiert“. Schüler sollen auf die natürliche Frage „warum nicht?“ **eine angemessene Antwort** erhalten. Auch in einem Mathematikbuch kann „$\frac{1}{0} = \infty$“ gefunden werden. Dies ist dann sinnvoll, wenn die Benutzer erfahren, dass es sich dabei nur um eine handliche Kurzfassung für eine Aussage über bestimmte divergente Folgen handelt. Es muss geklärt sein, dass „$\frac{1}{0} = \infty$“ nicht bedeutet, dass nach den Regeln der Bruchrechnung gearbeitet werden kann. Auch muss deutlich sein, dass mit ∞ kein Objekt bezeichnet wird, das alle üblichen Eigenschaften einer Zahl hat. Wird versucht, diesem Zeichen ∞ ein Objekt zuzuweisen, mit dem nach den Regeln des Zahlenrechnens gearbeitet wird, dann kann es geschehen, dass danach neben einer wahren Aussage auch deren Negation hergeleitet werden kann. In ein System mathematischer Aussagen kann nur dann eine weitere Definition aufgenommen werden, wenn auch danach **das System** noch **widerspruchsfrei** ist. Diese Forderung ist für ein wissenschaftliches System so fundamental, dass sie auch im allgemeinbildenden Mathematikunterricht vorkommen sollte.

Gelegentlich werden angebliche Beweise offensichtlich unsinniger Aussagen vorgeführt. Jeder Schüler soll davon überzeugt werden, dass dies nur dadurch erreicht werden kann, dass im Laufe der Demonstration eine falsche Aussage mehr oder weniger geschickt maskiert in Anschlag gebracht wird. In einigen populären Scheinbeweisen ermöglicht eine unauffällige Division durch Null einen überraschenden Trugschluss. Viele Schüler können befähigt werden, dies zu erkennen und überdies selbst Scheinbeweise bei passenden Gelegenheiten erfolgreich vorzuführen.

Einordnung:

Mit Schülern kann und sollte an jeweils geeigneten Stellen der Schulmathematik immer deutlicher herausgearbeitet werden, dass einem vorgelegten sogenannten „Quotienten mit dem Divisor Null“ nicht eindeutig eine Zahl zugewiesen werden kann. Die vorgelegten Arbeitsblätter können dazu jeweils zu einem Einstieg, aber auch zu vertiefender Übung nützlich werden. Das Problem ist wesentlich und es ist so anspruchsvoll, dass eine vertiefende ausführliche Erörterung im Klassenverband unter angemessener Führung der Lehrkraft unverzichtbar bleibt.

Gelegentlich wird behauptet, die Division durch Null sei verboten. Dies entspricht nicht mathematischem Denken. Auch ist die schlichte Mitteilung, eine solche Division könne nicht durchgeführt werden, ohne weitere Begründung für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht zu wenig. Es

1.16	Zur Division durch die Zahl Null

Vorüberlegungen

kann sehr wohl **geklärt und einsichtig gemacht** werden, warum die Division durch Null nicht definiert wird.
Im Elementarunterricht kann die Multiplikation als mehrmaliges Addieren eingeführt werden. Entsprechend kann die Division ohne Rest durch mehrmaliges Subtrahieren realisiert werden. Da nicht jede Division ohne Rest bleibt, ist es für Lernende gar nicht besonders verwunderlich und daher problemlos zu erkennen, dass auch die Division durch Null zu keiner natürlichen Zahl führt.

Werden Brüche als Teile von Ganzen eingeführt, hat es keinen Sinn, wenn im Nenner die Null steht. Die Zahl Null macht Probleme, wenn Brüche als Quotienten interpretiert werden.

Wird die Division als Umkehroperation der Multiplikation angesehen, muss geklärt werden, was unter einem Quotienten mit dem Divisor Null zu verstehen sei. Die Division kann auch durch eine Multiplikation mit der Kehrzahl des Divisors realisiert werden. Dann wird nach der Kehrzahl der Zahl Null gefragt. Ein solches Objekt wird gelegentlich „unendlich" genannt und mit dem Symbol ∞ bezeichnet. Dabei handelt es sich allerdings keineswegs um eine Zahl, mit der nach den Regeln des Zahlenrechnens gearbeitet werden kann. Hier können einfach zu erschließende Konsequenzen erarbeitet werden, die sich aus der folgenden falschen Annahme ergeben können: „Es ist $1 : 0 = \frac{1}{0}$ eine auch mit ∞ bezeichnete Zahl, mit der nach den Regeln der Bruchrechnung gerechnet werden kann." Aus dieser falschen Annahme können auf einfache Weise zu wahren Aussagen auch deren Negationen gefolgert werden. Würde die Annahme in das System mathematischer Aussagen aufgenommen, wäre danach das Gesamtsystem widerspruchsvoll. Es gibt Argumente für die Definition $0^0 = 0$, es gibt überzeugendere Argumente für die Festlegung $0^0 = 1$. Weil mehrere Kandidaten vorhanden sind, muss auf eine Definition von 0^0 keineswegs verzichtet werden. Die Festlegung $0^0 = 1$ ist sinnvoll, da sie die Darstellung einiger Sätze vereinfacht ($e^x = x^0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$; $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ auch für $q = 0$). Die Definition (Konvention) $0^0 = 1$ ist möglich, denn sie erzeugt keine Widersprüche. Die Definition $0 : 0 = 1$ wird nicht deshalb vermieden, weil es neben der Zahl 1 weitere Kandidaten geben könnte, sondern weil jede Festlegung auf eine Zahl zu Widersprüchen führt.
Bei der Bestimmung der Lösungsmenge einer Bruchgleichung kann es geschehen, dass nach dem Ersetzen der Variablen durch eine Zahl der Grundmenge eine Division durch Null gefordert wird. Dann liegt ein undefinierter Term vor. Dies hat Konsequenzen für die Lösungsmenge und für Umformungen der Gleichung.

Kleine **mathematische Kabinettstückchen** können von Schülern anderen Schülern oder auch bei einem **Elternabend** vorgeführt werden. Dabei sollten nicht bedeutungslose Gags, sondern wichtige mathematische Fragestellungen zugrunde liegen. Trugschlüsse sind hier ein dankbares Thema. Die Präsentation eines mathematischen Trugschlusses besteht immer aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird die benutzte falsche Aussage möglichst maskiert, damit die Zuschauer staunen und verunsichert sind. Unverzichtbar ist der zweite Teil, in dem die falschen Aussagen für alle Zuschauer offen gelegt werden. Die klare, eindeutige und widerspruchsfreie mathematische Begriffsbildung erlaubt es, dass dieser Teil von Schülern ruhig und gelassen geleitet werden kann. Dabei werden alle Interessierten ernst genommen, alle können die Hintergründe nachvollziehen, niemand wird ausgeschlossen. So wird mathematisches Denken lebendig.

Zur Division durch die Zahl Null | 1.16

Vorüberlegungen

Die einzelnen Arbeitsblätter im Überblick:

1. Block: **Zur Division durch die Zahl Null**
Im Laufe des Mathematikunterrichts kann die Division durch Null mehrmals thematisiert und dabei vertieft werden.
Die Division natürlicher Zahlen ohne Rest kann als mehrmaliges Subtrahieren eingeführt werden. Was geschieht, wenn der Divisor 0 ist?
Arbeitsblätter 1.1 und **1.2** (**M1** und **M2**); **Lösungen** siehe **M17**
Bei alltäglichen Aufgaben zum Aufteilen oder Verteilen spielt die Division durch die Zahl Null keine Rolle. Werden Brüche zur Beschreibung von Teilen von Ganzen eingeführt, ergibt es keinen Sinn, wenn im Nenner eine Null steht.
Arbeitsblatt 1.3 (**M3**); **Lösungen** siehe **M18**
Die Division ist Umkehroperation der Multiplikation. Damit die Division natürlicher Zahlen stets möglich ist, werden Brüche eingeführt. Undefiniert bleibt die Division durch die Zahl Null.
Arbeitsblatt 1.4 (**M4**); **Lösungen** siehe **M18**
Eine Division kann auch als Multiplikation mit der Kehrzahl des Divisors realisiert werden. Gibt es Probleme, wenn versucht wird, eine Bruchzahl einzuführen, welche Kehrzahl zur Zahl Null sein soll?
Arbeitsblatt 1.5 (**M5**); **Lösungen** siehe **M18**
Es kann ermittelt werden, welche Konsequenzen die Festlegung „$\frac{0}{0}$ ist eine Zahl“ hätte.
Hier wird deutlich, warum die Festlegung $0 : 0 = 1$ nicht getroffen werden kann.
Arbeitsblatt 1.6 (**M6**); **Lösungen** siehe **M19**

Es werden einige Konsequenzen, welche folgende Festlegung hätte: „Für jede Zahl a kann mit $\frac{a}{0}$ nach den Regeln der Bruchrechnung gearbeitet werden.“
Arbeitsblätter 1.7 und **1.8** (**M7** und **M8**); **Lösungen** siehe **M19** und **M20**

2. Block: **Zum logischen Schließen**
Hier wird in das indirekte Beweisverfahren eingeführt. Schüler müssen befähigt werden, sich an Diskussionen aller Art erfolgreich zu beteiligen. Sie müssen wissen, dass es nicht gleichgültig ist, wenn nebenbei falsche Behauptungen eingeführt werden. Diese können dadurch maskiert werden, dass zunächst wahre Aussagen gefolgert werden.
Arbeitsblätter 2.1 und **2.2** (**M9** und **M10**); **Lösungen** siehe **M21**

3. Block: **Die Null ist eine ganz besondere Zahl**
Hier werden Addition und Multiplikation verglichen und die Sonderrolle der Null herausgestellt.
Arbeitsblätter 3.1 und **3.2** (**M11** und **M12**); **Lösungen** siehe **M22**

4. Block: **Wir präsentieren Trugschlüsse**
Es macht vielen Schülern Freude, nicht nur Trugschlüsse zu durchschauen, sondern auch selbst Scheinbeweise in geeigneter Form zu präsentieren. Hierzu werden Anregungen gegeben.
Arbeitsblätter 4.1 und **4.2** (**M13** und **M14**); **Lösungen** siehe **M23**

5. Block: **Die Null in der Gleichungslehre**
Da eine Division durch Null nicht erklärt ist, können bei Bruchgleichungen undefinierte Terme vorkommen. Dies hat Konsequenzen.
Arbeitsblätter 5.1 und **5.2** (**M15** und **M16**); **Lösungen** siehe **M24**

Zur Division durch die Zahl Null	1.16
Arbeitsblatt 1.1	M1

Zur Division ohne Rest

Vorbereitung:
Felix hat einen leeren Korb. Er legt 4-mal nacheinander jeweils 5 Äpfel in den Korb. Wie viele Äpfel sind danach im Korb?
1. Rechenweg: $0 + 5 + 5 + 5 + 5 = 20$
2. Rechenweg: $4 \cdot 5 = 20$

Ergebnis: Danach sind 20 Äpfel im Korb.

Im Korb sind 20 Äpfel. Suse nimmt nacheinander jeweils 5 Äpfel aus dem Korb. Wie oft kann dies geschehen?
1. Rechenweg: $20 - 5 - 5 - 5 - 5 = 0$
2. Rechenweg: $20 : 5 = 4$

Ergebnis: Suse kann 4-mal jeweils 5 Äpfel aus dem Korb nehmen.

Aufgabe 1:
Formuliere eine entsprechende Aufgabe in zwei Teilen. Im ersten Teil soll eine Multiplikation als wiederholte Addition, im zweiten eine Division als wiederholte Subtraktion dargestellt werden.

Aufgabe 2:
a) Wir schreiben nicht $3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7$, sondern $3 \cdot 7 = 0 + 7 + 7 + 7$, damit 3-mal 7 addiert wird. Was ergeben dann $2 \cdot 7$, $1 \cdot 7$ und $0 \cdot 7$?
b) Wir schreiben nicht $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, sondern $5^3 = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, damit 3-mal mit 5 multipliziert wird. Was ergeben dann 5^2, 5^1 und 5^0?
c) Es ist $26 : 13 = 2$, denn es ist $26 - 13 - 13 = 0$.
Bearbeite entsprechend: $45 : 15$ und $95 : 19$ und $7 : 7$.

Aufgabe 3:
Ausgangszahl ist 0. Wie oft muss nacheinander 5 subtrahiert werden, um 0 zu erhalten?
Es wird nicht subtrahiert, denn die Zahl 0 ist schon erreicht. Es wird 0-mal subtrahiert.
Ergebnis: Es ist $0 : 5 = 0$.
Berechne analog:
a) $24 : 12$ b) $12 : 12$ c) $0 : 12$

Aufgabe 4:
Ausgangszahl ist 30.
Wie oft muss nacheinander 8 subtrahiert werden, um 0 zu erhalten?
$30 - 8 = 22;\ 22 - 8 = 14;\ 14 - 8 = 6;\ 6 - 8 \neq 0$
So wird die Zahl 0 nicht erreicht. Es gibt keine natürliche Zahl, die angibt, wie oft 8 von 30 subtrahiert werden muss, um 0 zu erhalten.
Ergebnis: Der Ausdruck $30 : 8$ bezeichnet keine natürliche Zahl.
Allerdings gibt es die Dezimalzahl 3,75 und es ist $30 : 8 = 3{,}75$.
Berechne analog:
a) $51 : 17$ b) $19 : 5$ c) $9 : 2$ d) $10 : 3$

