Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 14

Titel: Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen (24 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:
Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de
Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach
Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377
http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen 1.17

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler lernen, die Lösungsmenge einer Bruchgleichung sicher und zügig zu bestimmen.*
- *Sie erhalten dabei Gelegenheiten, Gleichungslehre zu vertiefen. Dabei lernen sie die Definitionsmenge einer Gleichung kennen und sie verstehen ihre Bedeutung.*
- *Sie erfahren, dass im Allgemeinen zwar mehrere Lösungswege zum Ziel führen, ein geschickter Ansatz den Rechenaufwand aber beträchtlich reduzieren kann.*

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher.
Albert Einstein

Zentrales Anliegen:

Bruchgleichungen sind nicht nur ein wichtiger, sondern auch ein unverzichtbarer Baustein, wenn Gleichungslehre so gelehrt werden soll, dass **Verständnis** ermöglicht wird. Bei der Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung spielen Äquivalenzumformungen die wesentliche Rolle – es sind dies Umformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern. Eine vorgegebene Gleichung wird mit Äquivalenzumformungen so lange umgeformt, bis aus der neuen Gleichung die Lösungsmenge einfach oder sogar unmittelbar abgelesen werden kann. Dazu muss natürlich geklärt werden, welche Manipulationen Äquivalenzumformungen sind. Bei einem ersten Kontakt mit einfachsten Gleichungen mag es vorläufig genügen, wenn vage festgehalten wird, „dass auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche" zu geschehen habe. Dabei wird gelegentlich zur ersten Einführung eine Waage als nützliche Analogie und Merkhilfe herangezogen, das gibt allerdings keinesfalls eine angemessene Begründung ab. Ungenaue Formulierungen und nur eingeschränkt gültige Analogien können dann gerade bei Bruchgleichungen zu Fehlern führen, die undurchschaubar sind, wenn die Sonderrolle der Null nicht beachtet wird.

Schüler sollen ja im Unterricht nach und nach behutsam in die Gleichungslehre eingeführt werden, nur mit dem Grad von Strenge, der für das Verständnis unbedingt erforderlich ist. Auf diesem Weg können Bruchgleichungen ein nützlicher Baustein sein, denn hier können Schüler zum ersten Mal erfahren, wie eine Belegung der Variablen mit einem Element der Grundmenge zu einem undefinierten Term führt.

Einordnung:

Zur Einführung in die Gleichungslehre werden Gleichungen behandelt, die zu linearen Gleichungen $ax + b = c$ äquivalent sind. Ohne besondere Probleme können danach quadratische Gleichungen bearbeitet werden. Die Gleichungslehre muss aber vertieft werden, wenn in den Gleichungen undefinierte Terme auftreten können. Hier sind Bruchgleichungen besonders geeignet. Da Bruchgleichungen traditionell vor quadratischen Gleichungen behandelt werden, legen wir in den zur Einführung geeigneten Arbeitsblättern die Menge der rationalen Zahlen zugrunde.

Werden nur ganze Zahlen betrachtet, kann problemlos addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Soll der Ring der ganzen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen erweitert werden, wird die Null unangenehm. Der Quotient $z : n$ bezeichnet nur dann eine rationale Zahl, wenn n von Null verschieden ist.

1.17	Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen

Vorüberlegungen

Sind T_1 und T_2 Terme, bei denen keine Variable in einem Nenner steht, dann sind auch $T_1 + T_2$, $T_1 - T_2$ und $T_1 \cdot T_2$ Terme dieser Art. In einem ersten Schritt der Einführung in die Gleichungslehre wird man sich auf diese Termbildungen beschränken und den Term $T_1 : T_2$ ausschließen, wenn Gleichungen bezüglich einer Grundmenge gebildet werden. Jedes Element der Grundmenge kann für die Variable eingesetzt werden. Dadurch ergibt sich auf jeder Seite der Gleichung eine Zahl. Handelt es sich um die gleiche Zahl, liegt eine wahre Aussage vor, und dieses Element der Grundmenge ist ein Lösungselement. Entstehen auf der linken und rechten Seite unterschiedliche Zahlen, dann ist diese für die Variable eingesetzte Zahl kein Lösungselement. Da bei jeder Belegung der Variablen mit einem Element der Grundmenge Zahlen entstehen, ist die Grundmenge auch die Definitionsmenge der Gleichung.

Enthält ein Term in mindestens einem Nenner eine Variable, nennt man ihn einen **Bruchterm**. Enthält eine Gleichung mindestens einen Bruchterm, so heißt sie eine **Bruchgleichung**. Nimmt ein Nenner bei einer Belegung der Variablen mit einer Zahl der Grundmenge den Wert 0 an, ist der zugehörige Bruchterm für diese Einsetzung nicht definiert. Dann ist die Definitionsmenge eine echte Teilmenge der Grundmenge. Werden Bruchterme zugelassen, muss über Äquivalenzumformungen vertieft nachgedacht werden. Werden beide Seiten einer Gleichung mit dem gleichen Bruchterm multipliziert oder wird zu beiden Seiten einer Gleichung der gleiche Bruchterm addiert, kann dies die Definitionsmenge verändern. Da die Lösungsmenge stets eine echte oder unechte Teilmenge der Definitionsmenge ist, kann sich auch die Lösungsmenge ändern. Daher schlagen wir vor, die Betrachtung der Definitionsmenge der Gleichung in den Lösungsweg einzubinden. Bei Umformungen wird dann kein Term benutzt, dessen Nenner bei einer Belegung der Variablen mit einem Element der Definitionsmenge den Wert 0 annimmt. Wird auf die Betrachtung der Definitionsmenge verzichtet, sollten bei jeder Umformung die durch die Sonderrolle der Zahl 0 bewirkten einschränkenden Bedingungen notiert werden.
Wird die Variable eines Bruchterms mit einer Zahl belegt, kann es vorkommen, dass ein Nenner den Wert 0 annimmt und deshalb der Term nicht definiert ist. Schüler sollten wissen, warum nicht durch Null dividiert wird. Dies geschieht nicht, weil es verboten ist, sondern weil es nicht möglich ist, einem Quotienten $a : 0$ eindeutig ein Objekt zuzuweisen, mit dem widerspruchsfrei in der für Zahlen üblichen Weise gerechnet werden kann (siehe dazu auch den Beitrag 1.16 in dieser Ausgabe.)

Bei knapper Unterrichtszeit können Bruchgleichungen leider oft nicht mit der gesamten Klasse in wünschenswerter Breite und Tiefe behandelt werden. Unangenehm dürfte dies für Schüler werden, welche sich später wohlvorbereitet mit gebrochen-rationalen Funktionen beschäftigen sollen, bei denen die Betrachtung der Definitionsmenge unverzichtbar ist.

Es werden daher Arbeitsblätter angeboten, die auch zu weitgehend selbstständiger Arbeit der Schüler geeignet sind. Aus reichlichem Übungsmaterial kann gegebenenfalls eine angemessene Auswahl getroffen werden. Die verwendeten Zahlen sind so gewählt, dass ein Taschenrechner grundsätzlich überflüssig ist. Ein Ziel ist, dass Schüler elegante Lösungswege finden – dazu wird keine aufwendige Zahlenrechnung benötigt.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Gleichungen mit Bruchzahlen
2. Schritt: Wie kann ein Fehler vermieden werden?
3. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge einer Bruchgleichung
4. Schritt: Weitere Bruchgleichungen

Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen	1.17

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Gleichungen mit Bruchzahlen

Hier geht es noch nicht um Bruchgleichungen, sondern um Gleichungen, bei denen die Konstanten Bruchzahlen sein können. Es werden zwei Lösungswege vorgestellt:

- Die einzelnen Seiten der Gleichung werden zuerst für sich vereinfacht und danach wird die Gleichung so umgeformt, dass nur auf einer Seite die Variable und auf der anderen eine Zahl steht.
- Zuerst werden beide Seiten der Gleichung mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert, um eine nennerfreie äquivalente Gleichung zu gewinnen.

Arbeitsblatt 1 (**M1**); **Lösungen** siehe **M16**

2. Schritt: Wie kann ein Fehler vermieden werden?

Hier werden mögliche Fehler aufgezeigt, die bei einer zu naiven Behandlung einer Bruchgleichung entstehen können. Es soll deutlich werden, dass es der Behandlung einer Bruchgleichung nützlich ist, in einem ersten Schritt die Definitionsmenge der Gleichung zu bestimmen.

Arbeitsblätter 2.1 bis **2.4** (**M2** bis **M5**); **Lösungen** siehe **M16**

3. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge einer Bruchgleichung

Zuerst werden Lösungswege skizziert. Dabei kann das erworbene Wissen angemessen vertieft werden. Danach stehen Übungsaufgaben zur Auswahl bereit. Hier liegt die Menge der rationalen Zahlen zugrunde.

Arbeitsblätter 3.1 bis **3.7** (**M6** bis **M12**); **Lösungen** siehe **M16** bis **M18**

4. Schritt: Weitere Bruchgleichungen

Nachhaltigkeit wird dann erreicht, wenn an ein Thema nach einer ersten einführenden Behandlung immer wieder erinnert wird. Es gibt Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen können. Es werden auch Bruchgleichungen angeboten, in den die Konstanten Wurzeln sein können. Hier wird die Menge der reellen Zahlen zugrunde gelegt.

Arbeitsblätter 4.1 bis **4.3** (**M13** bis **M15**); **Lösungen** siehe **M19** bis **M21**

Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen	1.17
Arbeitsblatt 1	M1

Gleichungen mit Bruchzahlen

Grundmenge sei Q. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$1{,}5 - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0.$

Im Folgenden werden zwei mögliche Lösungswege angegeben. Vergleiche beide.

1. Lösungsweg:
Zuerst werden Terme vereinfacht.

$1{,}5 - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0$

$\frac{12 - 5}{8} - \frac{5 - 3}{12}x = 0$

$\frac{1}{6}x = \frac{7}{8}$

$x = \frac{21}{4}$

Lösungsmenge: $L = \{5{,}25\}$

2. Lösungsweg:
Beide Seiten der Gleichung werden multipliziert.

$1{,}5 - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0 \quad | \cdot 24$

$36 - 15 - 10x + 6x = 0$

$4x = 21$

$x = 5{,}25$

Lösungsmenge: $L = \{5{,}25\}$

Aufgabe:
Grundmenge sei Q. Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 14$

b) $\frac{28}{30}x - \frac{14}{21}x - \frac{13}{65}x = 2$

c) $0{,}25x - 0{,}\overline{3}x + \frac{5}{6} = 0$

d) $1{,}5x - 0{,}4 = 0{,}5$

e) $x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32}$

f) $\frac{1}{5}(x - 2) - \frac{1}{8}(3x - 17) = \frac{1}{2}$

g) $\frac{x + 11}{4} + \frac{4x - 1}{3} = \frac{3x - 7}{2}$

h) $\frac{x + 4}{3} - \frac{x - 4}{5} = 2 + \frac{3x - 1}{15}$

i) $\frac{5}{15}(4x + 7) + 8x = \frac{17}{34}(6x + 5) + 3$

j) $1{,}5(2 - x) = \frac{2}{3}(x - 5) + x$

k) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x = 3x$

l) $\frac{7}{8}x - \frac{5}{24}x + \frac{1}{3}x = x$

m) $\frac{11}{12}x - \frac{2}{3}x = 2 + 0{,}25x$

n) $\frac{7}{12}x - \frac{5}{8}x + \frac{1}{4}x - 5 = 0$

> Eine Gleichung heißt eine **Bruchgleichung**, wenn die Variable in mindestens einem Nenner steht.

Die oben angegebenen Gleichungen sind keine Bruchgleichungen, sondern Gleichungen, bei denen Bruchzahlen vorkommen.

