Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 16

Titel: Über pythagoreische Zahlentripel (34 S.)

Produkthinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

- Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie hier.

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

- Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie hier.

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

- Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.
- Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie hier.

Nutzungsbedingungen

Sekundarstufe

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

Kontaktformular | Mail: service@eDidact.de

Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG

E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach

Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | Fax: +49 (0)9221 / 949-377

http://www.eDidact.de | https://www.bildung.mgo-fachverlage.de

MEDIENGRUPPE OBERFRANKEN

FACHVERLAGE

Über pythagoreische Zahlentripel

1.19

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler können sich mit steigendem Anspruchsniveau mehrmals mit pythagoreischen Zahlentripeln beschäftigen. Dabei erleben sie, dass zwischenzeitlich erworbenes Wissen nützlich eingesetzt werden kann.*
- *Die Schüler erfahren, dass sich arithmetische Überlegungen und geometrische Argumentationen effektiv ergänzen können.*

Zentrales Anliegen:

Ein Motiv für eigenes forschendes Denken und Handeln kann die Neugier sein. Um Neugier im Mathematikunterricht zu wecken, bedarf es eines schönen Inhaltes mit leicht verständlichen Fragestellungen, deren erfolgreiche Bearbeitung nach angemessenem Bemühen gelingen kann. Hierzu sind pythagoreische Tripel ein geeignetes Beispiel. Weithin bekannt ist die ägyptische Schnur mit dem Zahlentripel (4; 3; 5). Gibt es weitere solche besondere Zahlentripel? Mithilfe von Computerprogrammen können zu unterschiedlichen Fragestellungen jeweils nur endlich viele Tripel ausgedruckt werden. Eine noch so umfangreiche Computersuche ist daher keine sichere Grundlage für Aussagen über nicht endliche Mengen – und es gibt mehr als endlich viele pythagoreische Tripel.

Schüler erleben, dass erfolgreiches mathematisches Handeln stets gesichertes Basiswissen voraussetzt. Wird solches außerhalb der Routine aktiviert, kann von einem kreativen Einfall gesprochen werden. Da natürliche Zahlen mit besonderen Eigenschaften gesucht werden, sind Überlegungen zur Teilbarkeitslehre naheliegend. Daneben dürften algebraische Umformungen nützlich sein, um natürliche Zahlen mit besonderen Eigenschaften zu ermitteln. Hier kann man eindrucksvoll erleben, wie auch elementare Aussagen der Geometrie geeignet sein können, ein arithmetisches Problem elegant zu bewältigen.

Einordnung:

Da mit pythagoreischen Zahlen auf deutlich unterschiedlichem Niveau gearbeitet werden kann, sind diese auf allen Stufen hervorragend geeignet, unterschiedliche Unterrichtsformen zu bereichern. Die Spanne reicht von abwechslungsreichen Übungsaufgaben bis zu Problemen für besonders befähigte Schüler. Für alle Schüler realisierbar und wünschenswert ist, dass sie wenigstens gelegentlich die Möglichkeit erhalten, eigene Vermutungen zu formulieren, diese durch Beispiele zu widerlegen oder zu stützen und sie schließlich sogar erfolgreich zu beweisen. Ist ein Problem formuliert, soll deutlich werden, dass es im Allgemeinen viele Wege gibt, die zum Ziel führen können. Eine gelegentlich anzutreffende passive Haltung oder Mutlosigkeit kann aufgeweicht werden, wenn Schüler zu angemessenen Fragen eigene Lösungen finden oder wenigstens mit Hilfestellungen ausarbeiten können. Hilfestellungen sind unverzichtbar, denn Schüler sollen unbedingt auch Neues erfahren. Liegen für ein Problem schließlich mehrere Lösungsvorschläge vor, können diese verglichen und als ein Höhepunkt des Unterrichts gemeinsam bewertet werden.

Literatur:

Rademacher, H./Toeplitz, O.: Von Zahlen und Figuren, Springer Verlag, Berlin 1968

1.19	Über pythagoreische Zahlentripel

Vorüberlegungen

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Über Summen von Quadratzahlen
2. Schritt: Der Satz von Pythagoras und seine Umkehrung
3. Schritt: Zur Menge der pythagoreischen Zahlentripel
4. Schritt: Wir berechnen pythagoreische Zahlentripel
5. Schritt: Aus der Teilbarkeitslehre
6. Schritt: Pythagoreische Zahlentripel mit geforderten Eigenschaften
7. Schritt: Die Menge der pythagoreischen Tripel
8. Schritt: Die Menge der pythagoreischen Grundtripel
9. Schritt: Einige Eigenschaften pythagoreischer Grundtripel

Über pythagoreische Zahlentripel	1.19

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Über Summen von Quadratzahlen

Bei $a^2 + b^2 = c^2$ handelt es sich zunächst um eine diophantische quadratische Gleichung mit eigenem Reiz. Daher muss der Satz von Pythagoras nicht unbedingt bekannt sein, um sich mit pythagoreischen Zahlen zu beschäftigen. Erste Erfahrungen mit Summen von Quadratzahlen werden in frühem Unterricht erfolgreich erworben. Nicht jede ganze Zahl, welche als Summe von zwei verschiedenen Quadratzahlen darstellbar ist, ist selbst eine Quadratzahl. Es zeigt sich aber, dass es zu jeder solchen Zahl ein pythagoreisches Zahlentripel gibt, in dem sie die größte Zahl ist.

(**Arbeitsblätter M1** bis **M3** und **M26**)

2. Schritt: Der Satz von Pythagoras und seine Umkehrung

Der Satz von Pythagoras ist traditionell ein Flächensatz der Kongruenzgeometrie. Entsprechende Beweise können ohne große Vorbereitungen nachvollzogen werden. Während der Satz von Pythagoras in aller Munde ist, tritt seine Umkehrung gelegentlich unangemessen in den Hintergrund. Im Besonderen bedarf die Umkehrung des Satzes von Pythagoras eines für Schüler einfachen Beweises. Auch hierzu werden Alternativen skizziert.

(**Arbeitsblätter M4** bis **M10**)

3. Schritt: Zur Menge der pythagoreischen Zahlentripel

Nun wird der Satz von Pythagoras vorausgesetzt. Zwei geometrische Aufgaben sind gleichwertig:

- Ermittle die Tripel ganzer Zahlen, welche Maßzahlen der Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke sein können.
- Ermittle die im 1. Quadranten liegenden Punkte des Kreises mit dem Radius 1 LE um den Koordinatenursprung, welche rationale Koordinaten haben.

Es ist nützlich, bei Argumentationen beide Situationen im Auge zu behalten.

(**Arbeitsblatt M11**)

4. Schritt: Wir berechnen pythagoreische Zahlentripel

Es werden zu verifizierende Formeln vorgegeben, die geeignet sind, pythagoreische Tripel zu berechnen. Dabei handelt es sich um einfache Übungen zum Umgang mit Termen.

(**Arbeitsblätter M12** und **M13**)

1.19	Über pythagoreische Zahlentripel

Unterrichtsplanung

5. Schritt: Aus der Teilbarkeitslehre

Bei der Behandlung von Teilbarkeitsaussagen können Überlegungen zu pythagoreischen Zahlen eine sinnvolle Anwendung sein. Für den Unterricht mag eine Zusammenstellung einiger einfacher Aussagen nützlich sein. Diese werden benutzt, pythagoreische Grundtripel (primitive pythagoreische Tripel) zu untersuchen.

(**Arbeitsblätter M14** und **M15**)

6. Schritt: Pythagoreische Zahlentripel mit geforderten Eigenschaften

Hier werden keine fertigen Formeln vorgegeben. Gesucht sind pythagoreische Zahlentripel mit geforderten besonderen Eigenschaften. Zur erfolgreichen Bearbeitung genügen einfache algebraische Umformungen und Anwendungen der Teilbarkeitslehre.

(**Arbeitsblätter M16** und **M17**)

7. Schritt: Die Menge der pythagoreischen Tripel

Die Menge der pythagoreischen Tripel kann mithilfe von Formeln erfasst werden. Solche Formeln sollen ermittelt werden. Dieses arithmetische Problem kann mit unterschiedlichen Ansätzen mithilfe elementarer geometrischer Aussagen gelöst werden.

(**Arbeitsblätter M18** bis **M21**)

8. Schritt: Die Menge der pythagoreischen Grundtripel

Es soll die Menge der pythagoreischen Grundtripel mithilfe von Formeln beschrieben werden. Dies kann auch dann auf mannigfache Weise gelingen, wenn auf geometrische Aussagen verzichtet wird.

(**Arbeitsblätter M22** und **M24**)

9. Schritt: Einige Eigenschaften pythagoreischer Grundtripel

Bei der Betrachtung einer endlichen Liste pythagoreischer Grundtripel werden Aussagen über solche Zahlentripel vermutet. Diese können an Beispielen widerlegt oder bekräftigt werden. Mithilfe des erarbeiteten Wissens sind Schüler durchaus in der Lage, viele solche Aussagen angemessen zu beweisen. Es mag allerdings auch eine nützliche Erfahrung sein, dass nicht jede einfach zu formulierende Vermutung mühelos zu beweisen ist.

(**Arbeitsblätter M25** bis **M28**)